SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 16/1/2020.

A, 1

COMPITO A

1) Riscriviamo l'equazione in forma normale, dividendo per $x \neq 0$:

$$y'(x) - y(x) = \left(\frac{1}{x} + x\right)e^x$$

Studiamo il problema di Cauchy in $(-\infty, 0)$.

$$y(x) = e^{\int_{-1}^{x} dt}\left[\int_{-1}^{x} e^{-\int_{-1}^{t} ds}\left(\frac{1}{t}+t\right)e^t\, dt\right]$$

$$= e^{x+1}\left[\int_{-1}^{x} e^{-t-1}\left(\frac{1}{t}+t\right)e^t\, dt\right]$$

$$= e^x \int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{t}+t\right)dt = e^x\left[\ln(|t|) + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}$$

$$= e^x\left[\ln(|x|) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right] = e^x\left[\ln(-x) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

in $(-\infty, 0)$.

2) $\operatorname{tg} x > 0 \implies D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

A_2

f è ~~periodica~~ π-periodica:

$$f(x+\pi) = \operatorname{tg}(x+\pi) \ln(\operatorname{tg}(x+\pi))$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = f(x).$$

Poichè D non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione non possiede alcuna simmetria.

Studiamola in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Segno: poichè $\operatorname{tg} x > 0$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, allora

$$f(x) \geq 0 \iff \ln(\operatorname{tg} x) \geq 0 \iff \operatorname{tg} x \geq 1$$

$$\iff \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty.$$

AS. VERTICALE (da SX)

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

Ponendo poi $t = \operatorname{tg} x$,

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0^-$$

(A3)

LIMITE NOTEVOLE.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \ln(\operatorname{tg} x) + \cancel{\operatorname{tg} x} \cdot \left[\frac{1}{\cancel{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right]$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \left[\ln(\operatorname{tg} x) + 1 \right] \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \ln(\operatorname{tg} x) \geq -1 \quad \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x \geq \frac{1}{e}$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{\operatorname{arctg} \geq x} \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e}\right) \leq x < \frac{\pi}{2}$$

f decresce in $\left(0, \operatorname{arctg} \frac{1}{e}\right)$, cresce in $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$.

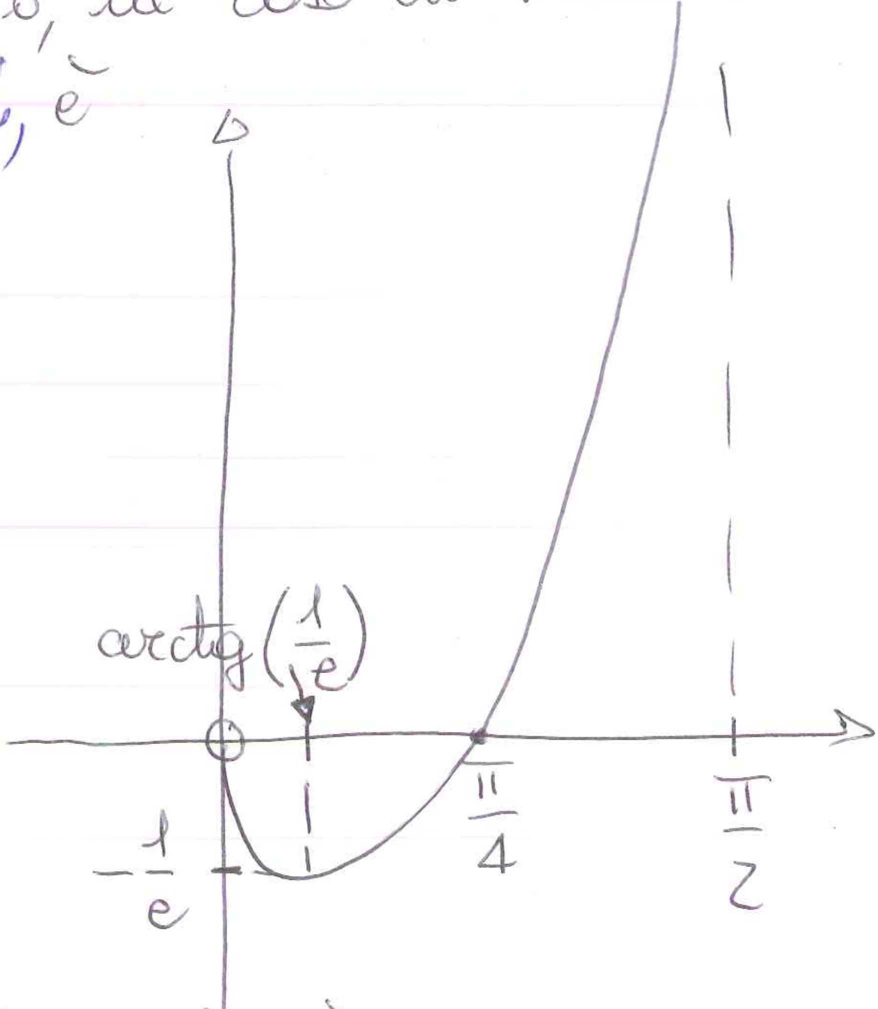
$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{e}$ è punto di MIN. REL. e ASS.

$$f\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

$\nexists$ MAX. REL. e ASS.

Poichè $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \ln(0^+) = -\infty$, (A4)

il grafico, in caso di numero minimo di flessi, è



e la funzione è sempre convessa.

A5

3) Metodo a):

ESSENDO UN'EQUAZIONE ALGEBRICA DI 4° GRADO DEVE AMMETTERE 4 SOLUZIONI

$$z^4 + \cancel{2z^2} + 1 - \cancel{2z^2} - 2 + 17 = 0$$

$$z^4 = -16 = 16\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right]$$

$$\Rightarrow\ z = \sqrt[4]{-16} \Rightarrow$$

$$z_0 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

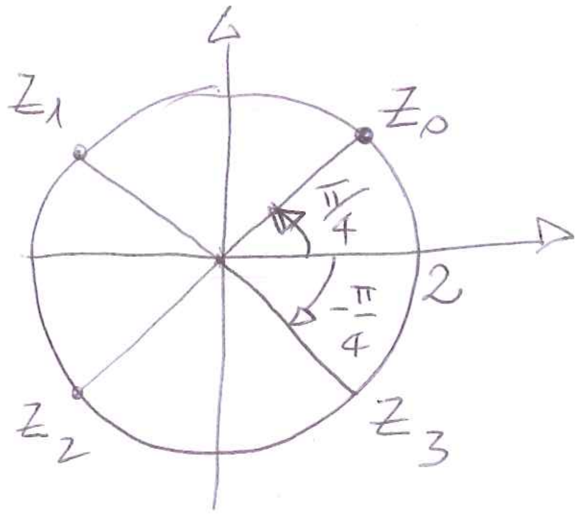
$$= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$



Metodo b): $t = z^2 + 1$

$$t^2 - 2t + 17 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 + \sqrt{-16} = 1 \pm 4i$$

$$\Rightarrow z^2 = t - 1 = \pm 4i$$

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{4i}\right) = \pm 2\sqrt{i} \quad ; \quad z_{3,4} = \pm\left(\sqrt{-4i}\right) = \pm 2\sqrt{-i}$$

che forniscono le stesse soluzioni.

4) Serie a termini positivi.

Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\log_a n}{\ln n} = \frac{\log_a e \cdot \cancel{\ln n}}{\cancel{\ln n}} < 1$$

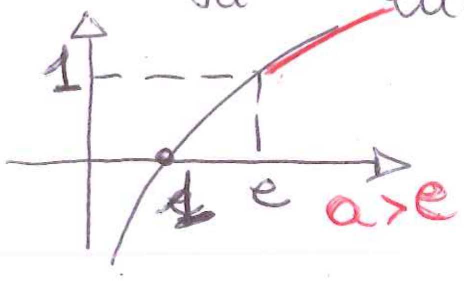
$$\iff \underbrace{a > e} \qquad \underline{\text{convergenza}}$$

Nel caso $a = e$ la serie diventa

$$\sum \left(\frac{\ln n}{\ln n}\right)^n = \sum 1 \longrightarrow +\infty$$

Quindi la serie converge $\iff a > e$.

N.B.: $\log_a e < 1$ può anche essere risolto osservando che $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a} \Rightarrow \ln a > 1$



5) $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\left[1-x+\frac{x^2}{2}\right]+x-1}{x^{5/2}} = \dfrac{x^2}{2x^{5/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

integrabile in $(0, a]$

$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^{5/2}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ ← integrabile in $[a, +\infty)$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la funzione è convergente in $(0, +\infty)$.

A_7

COMPITO B

(B 1)

1) Serie a termini positivi.

Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln(n)}{\log_a(n)} = \frac{\cancel{\ln(n)}}{\log_a(e)\cancel{\ln(n)}} = \frac{1}{\log_a(e)} = \ln a < \underline{1}$$

$\Longleftrightarrow 1 < a < e$ <u>convergenza</u>.

Per $a = e$ la serie diventa $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = \sum \underline{1} \to +\infty$.

Quindi la serie converge $\Longleftrightarrow 1 < a < e$

2) $$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}}}{x^{7/2}} = \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

integrabile in $(0, a]$.

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2x^{7/2}} = \frac{1}{2x^{3/2}}$$ integrabile in $[a, +\infty)$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la funzione f è integrabile in $(0, +\infty)$.

3) Dividiamo per $x^2 \neq 0$ (pertanto $x \neq 0$) per scrivere l'equazione in forma normale:

$$y'(x) + y(x) = \left(\frac{1}{x} + x\right) e^{-x}$$

B_2

Studiamo il problema di Cauchy in $(-\infty, 0)$.

$$y(x) = e^{-\int_{-1}^{x} dt} \left[\int_{-1}^{x} e^{\int_{-1}^{t} ds} \left(\frac{1}{t} + t\right) e^{-t} dt \right]$$

$$= e^{-x-1} \left[\int_{-1}^{x} e^{t+1} \left(\frac{1}{t} + t\right) e^{-t} dt \right]$$

$$= e^{-x} \int_{-1}^{x} \left(\frac{1}{t} + t\right) dt = e^{-x} \left[\ln|t| + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{x}$$

$$= e^{-x} \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= e^{-x} \left[\ln(-x) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right] \quad \text{per } x < 0.$$

4) $\begin{cases} tg(x) > 0 \\ tg(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow tg\, x > 0 \Rightarrow$

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

f è π-periodica:

$$f(x+\pi) = \frac{\ln(tg(x+\pi))}{tg(x+\pi)} = \frac{\ln(tg\, x)}{tg\, x} = f(x).$$

Poichè il dominio non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione non può ammettere simmetrie.

B3

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\text{tg}x)}{\text{tg}x} = \frac{\ln(\text{tg}\,0^+)}{\text{tg}\,0^+} = \frac{\ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

AS. VERTICALE da DX: $x = 0$

Ponendo $\text{tg}x = t$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\text{tg}x)}{\text{tg}x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0^+$$

per gli ordini di infinito.

Segno: poichè $\text{tg}x > 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$,

$$f(x) \geq 0 \iff \ln(\text{tg}x) \geq 0 \iff \text{tg}x \geq 1$$

$$\iff \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$f(\frac{\pi}{4}) = 0.$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{\mathrm{tg}x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,\cancel{\mathrm{tg}x} - \frac{1}{\cos^2 x}\ln(\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}^2 x}$$

B4

$$= \frac{1}{\cos^2 x\cdot \mathrm{tg}^2 x}\left[1-\ln(\mathrm{tg}x)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}\left[1-\ln(\mathrm{tg}x)\right] \geq 0$$

$$\iff \ln(\mathrm{tg}x)\leq 1 \quad \iff \mathrm{tg}x \leq e$$

$$\iff \quad 0 < x \leq \mathrm{arctg}(e).$$

f cresce in $(0, \mathrm{arctg}(e))$, decresce in $(\mathrm{arctg}(e), \frac{\pi}{2})$.

$x = \mathrm{arctg}(e)$ è punto di MAX. REL. e ASS.

$$f(\mathrm{arctg}(e)) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

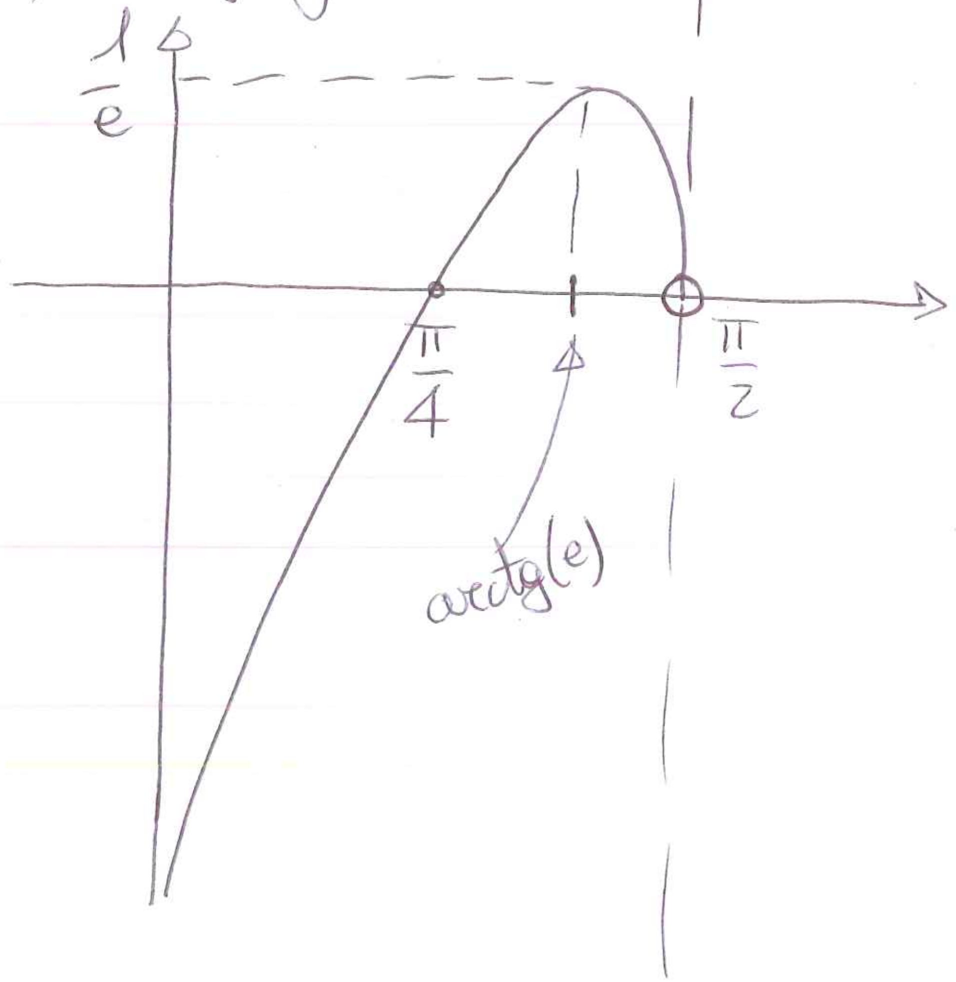
$\nexists$ MIN. REL. e ASS.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f'(x) = 1-\ln\left[\mathrm{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}^-\right)\right] = 1-\ln(+\infty)$$

$$= -\infty.$$

Pertanto, nel caso di numero minimo di flessi, il grafico è

B_s



e la funzione è sempre concava.

5) Metodo a):

ESSENDO UN'EQUAZIONE ALGEBRICA DI 4° GRADO, DEVE AMMETTERE 4 SOLUZIONI

$$z^4 \cancel{-2z^2}+1 \cancel{+2z^2}-2+17=0$$

$$z^4=-16=16\left[\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right]$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right]$$

B_6

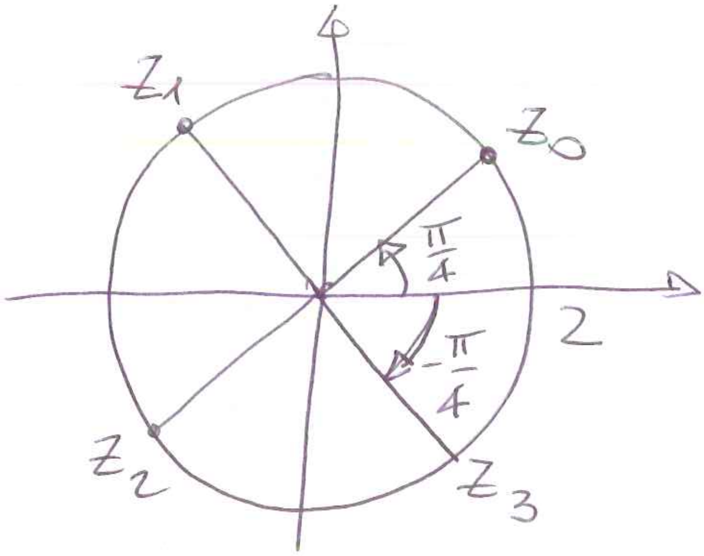
$$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right] = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$



Metodo b):

Poniamo $t = z^2 - 1 \Rightarrow t^2 + 2t + 17 = 0$

$$t_{1,2} = -1 + \sqrt{-16} = -1 \pm 4i$$

$$\Rightarrow z^2 = t + 1 = \pm 4i$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \pm 2\sqrt{i} \quad ; \quad z_{3,4} = \pm 2\sqrt{-i}$$

stesse soluzioni del metodo a).