SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1
16/1/2024 - COMPITO A

A1

1) $\bar{z}^2 \cdot z = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot z = |z|^2 \bar{z}$, da cui

$$-|z|^2 \bar{z} + y + i|z|^2 x = 0$$

$$|z|^2(-x + iy + ix) + y = 0$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(-x) + y = 0 \\ |z|^2(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z|^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad (x,y) = (0,0) \\ 0 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ (2x^2)(-x) - x = 0 \end{cases}$$

$$\{z = 0\} \cup \begin{cases} y = -x \\ x\underbrace{(2x^2+1)}_{\neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ unica soluzione $z = 0$.

2) $$\sum a_n \approx \sum \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum \frac{1}{n}$$

quindi diverge.

3) $I_{def} = \mathbb{R}$ $\qquad f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ $\qquad A_2$

f è dispari, perché è somma di funzioni dispari

$f(0) = 0$

Intersezioni con asse x tralasciate.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty + \frac{\pi}{2} = -\infty$$

da cui $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Per $x > 0$ $\quad \operatorname{arctg}(2x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x}\right)$

$$\Rightarrow f(x) \underset{\cancel{x \to +\infty}}{=} -x + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$y = -x + \frac{\pi}{2}.$$

Infatti: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[-1 + \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x}\right] = -1$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[-x + \operatorname{arctg}(2x) + x\right] = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}(2x) = \frac{\pi}{2}.$$

Analogamente, $y = -x - \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

<u>Monotonia</u>: $f'(x) = -1 + \frac{2}{1+4x^2} = \frac{1-4x^2}{1+4x^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{2}$

$f'(x) > 0 \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

f decresce in $(-\infty, -\frac{1}{2})$, cresce in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, decresce in $(\frac{1}{2}, +\infty)$

$x = -\frac{1}{2}$ punto di MIN. REL $\left(f(-\frac{1}{2}) = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}}_{<0}\right)$

$x = \frac{1}{2}$ punto di MAX. REL.

$\left(f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

$\nexists$ MAX. o MIN. ASSOLUTI. f ILLIMITATA.

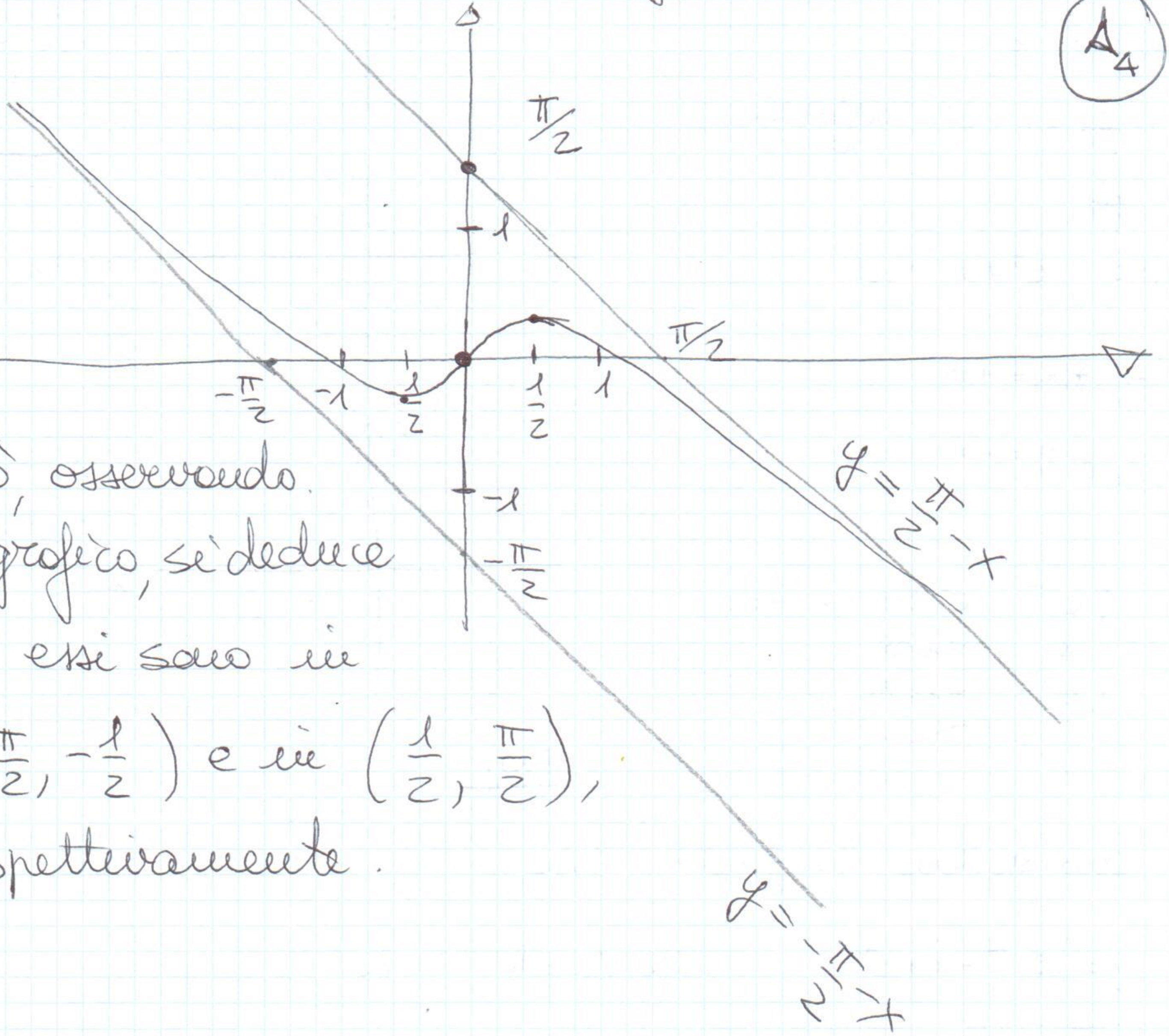
<u>CONVESSITÀ</u>: $f''(x) = \left[-1 + \frac{2}{(1+4x^2)}\right]'$

$$= \frac{-2}{(1+4x^2)^2} \cdot 8x = \frac{-16x}{(1+4x^2)^2}$$

f CONVESSA in $(-\infty, 0)$ e CONCAVA in $(0, +\infty)$. $x=0$ PUNTO DI FLESSO DISCENDENTE.

Non è possibile determinare gli zeri della f.

A4



Però, osservando il grafico, si deduce che essi sono in $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e in $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rispettivamente.

4) Omogenea associata:

$$y''-4y'+4=0$$

Equazione caratteristica: $\alpha^2-4\alpha+4=(\alpha-2)^2=0$

$\Rightarrow \alpha=2$ con $m_a=2$.

$\Rightarrow y_0(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

Determiniamo y_p col metodo di variazione delle costanti:

$$y_p(x)=c_1(x)e^{2x}+c_2(x)xe^{2x}$$

con $$C_1(x) = -\int \frac{f(x)\cdot x e^{2x}}{|W(y_1, y_2)|}\,dx$$

$$C_2(x) = \int \frac{f(x)\, e^{2x}}{|W(y_1, y_2)|}\,dx$$

$$|W(y_1, y_2)| = \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\int \frac{2e^{2x}\cdot x e^{2x}}{(x^2+4)e^{4x}}\,dx$$

$$= -\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = -\ln(x^2+4)$$

$$C_2(x) = \int \frac{2e^{2x} e^{2x}}{(x^2+4)\, e^{4x}}\,dx = \int \frac{2}{(x^2+4)}\,dx$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y_{No}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - e^{2x} \ln(x^2+4)$$
$$+ x e^{2x} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) $\lim_{x\to+\infty} y_p(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left[x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln(x^2+4)\right]$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(x \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)$

A 6

(per la gerarchia degli infiniti)

$= +\infty$

Pertanto $\nexists$ soluzioni.

b) $\lim_{x\to-\infty} y_{NO}(x) = 0 \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5) Per $x\to+\infty$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\alpha}\left[\cancel{\frac{2}{x}} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{x}\right)^3 - 2\left[\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{3x^3}\right] + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= x^{\alpha}\left[\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$\sim \frac{-2}{3x^{3-\alpha}}$$

integrabile se $3-\alpha > 1 \iff \alpha < 2$

non integrabile se $\alpha \geq 2$