SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1 DEL 21/3/2019.

1) Poniamo $z = y'$

$\Rightarrow x z' = -z \ln(x)$

$\Rightarrow z' = -z \cdot \frac{\ln(x)}{x}$ definito per $x > 0$.

Poichè $A(x) = \frac{\ln(x)}{x} \in C^{\infty}((0,+\infty))$

$B(z) = -z \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists!$ sol. (LOCALE) $z(x)$ al Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = -z \frac{\ln(x)}{x} \\ z(1) = 0 \end{cases}$$

Tale soluzione è la sol. singolare $z(x) \equiv 0$.

Ovviamente, ~~[illegible]~~ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ammette unicità della soluzione.

Tale soluzione è $\underbrace{y(x) = 1}$

2) $f \in C^0\left(\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)\right)$.

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Poichè $\frac{1}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$f(x) \geq 0$ in $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$.

$f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, che è integrabile in $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$

$\Rightarrow f$ è integrabile

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}$$

$$= +\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

3)

$$z^2(z^2+1) + i(z^2+1) = 0$$

$$(z^2+i)(z^2+1) = 0$$

$\Rightarrow z_{1,2} = \sqrt{-1}$; $z_{3,4} = \sqrt{-i}$

$z_{1,2} = \pm i$; $z_{3,4} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4)

$$a_n = \left[-\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + \cancel{1} - \frac{1}{2n^2} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \sqrt{n}$$

$$= \left(-\frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \sqrt{n} \sim -\frac{3}{2n^{3/2}}$$ 3

successione definitivamente negativa.

La serie associata converge per confronto asintotico con la serie

$$-\frac{3}{2} \sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

5)

$$I_{def} = \left\{ \frac{x^3-8}{x} \geq 0 \right\} = \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$= (-\infty, 0) \cup [2, +\infty).$$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I_{def}$

$f(2) = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \sqrt{\frac{-8}{0^-}} = +\infty$$

$x = 0$
AS. VERTICALE
da SX.

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{\frac{x^3}{3x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{8}{3x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{1-\frac{8}{x^3}}\right] = \frac{|x|}{\sqrt{3}} + o(1)$$

Dunque $y = \frac{|x|}{\sqrt{3}}$ è AS. OBLIQUO per $x \to \pm\infty$

Altrimenti:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3-8}{3x}} = \frac{\pm 1}{|x|}\sqrt{\frac{x^3-8}{3x}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{x^3-8}{3x^3}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}x\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3-8}{3x}} - \frac{1}{\sqrt{3}}x\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{1-\frac{8}{x^3}} - 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{3}}\left[\frac{-4}{x^3}\right] = 0$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{1}{\sqrt{3}}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3-8}{3x}}+\frac{x}{\sqrt{3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{|x|}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{8}{x^3}}+\frac{x}{\sqrt{3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{3}}\left[1-\sqrt{1-\frac{8}{x^3}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{x^3}=0$$

Quindi $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ ASINTOTO a $+\infty$

$y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$ " a $-\infty$.

$$f'(x)=\cancel{\frac{1}{2\sqrt{}}}\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x}{x^3-8}}\cdot\left[\frac{3x^2\cdot x-(x^3-8)}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x}{x^3-8}}\left(\frac{2x^3+8}{x^2}\right)\geq 0$$

$$\iff x^3+4\geq 0\quad\iff x\geq-\sqrt[3]{4}$$

$x=-\sqrt[3]{4}$ punto di MIN. REL.

Poiché $f(x)\geq 0$ e $f(2)=0$, $x=2$ è punto di MIN. ASS.

f decresce in $(-\infty, -\sqrt[3]{4})$; cresce in $(-\sqrt[3]{4}, 0)$; cresce in $[2, +\infty)$.

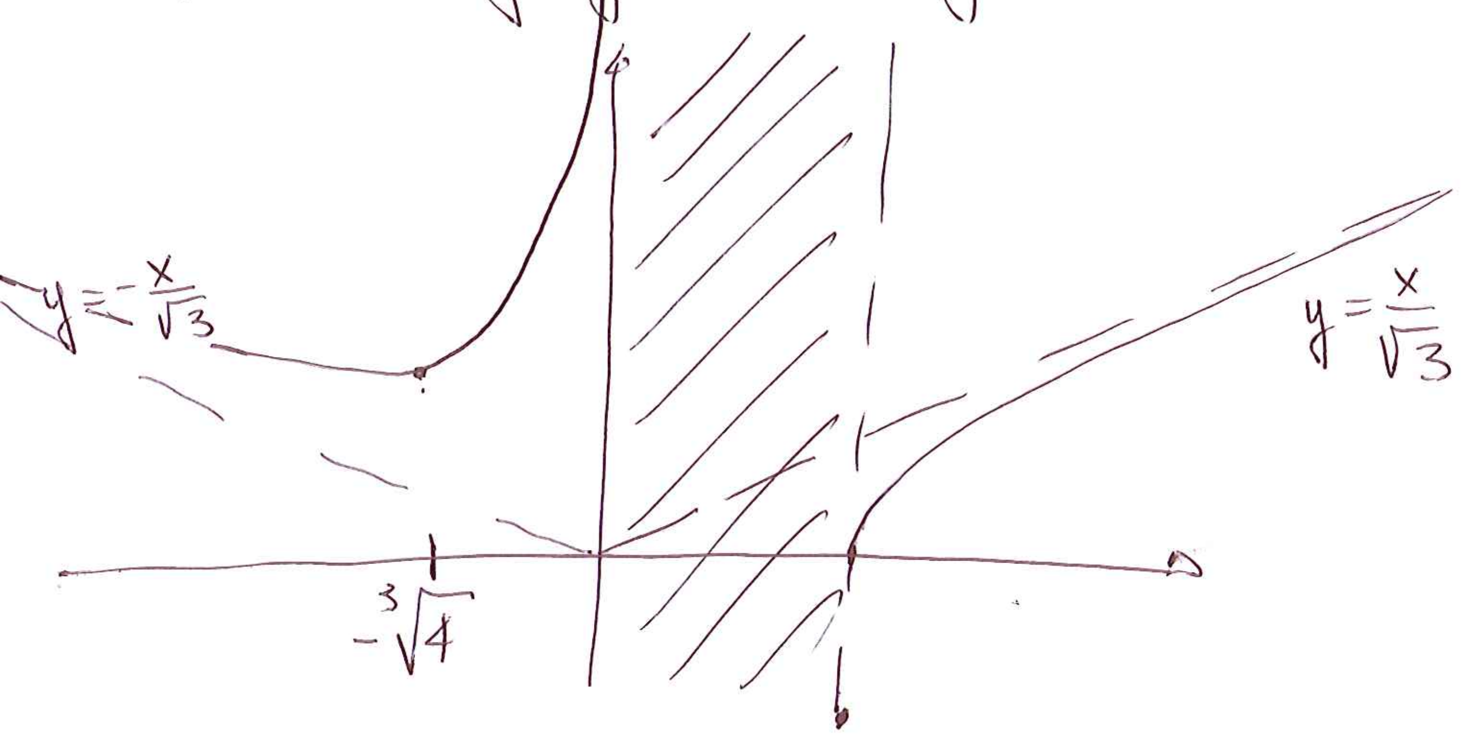
$$f(-\sqrt[3]{4}) = \sqrt{\frac{-\cancel{12}^{\,4}}{-\cancel{3}\sqrt[3]{4}}} = \sqrt{4^{1-\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

Si osservi che $f(-\sqrt[3]{4})$ è maggiore del valore della y sull'asintoto obliquo a $-\infty$ $y = \frac{|x|}{\sqrt{3}}$. Quindi la funzione giace al di sopra di tale asintoto.

Poichè $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{x^3(x^3-8)}}\,(x^3+4)$

e $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{12}{2\cdot 0^+} = +\infty$,

un possibile grafico della funzione è



Il grafico non presenta flessi.

f è convessa in $(-\infty,0)$ e concava in $[2,+\infty)$.

Studiando direttamente la derivata seconda, si ha

$$f''(x)=\left[\frac{(x^3+4)}{\sqrt{3}\,\sqrt{x^3(x^3-8)}}\right]'=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{3x^2\sqrt{x^3(x^3-8)}-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3(x^3-8)}}\cdot\left[6x^5-24x^2\right](x^3+4)}{x^3(x^3-8)}\right]$$

$$=\frac{6x^2}{\sqrt{3}\,2\left[x^3(x^3-8)\right]^{\frac{3}{2}}}\left[x^3(x^3-8)-(x^3+4)(x^3-4)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,x^2}{\left[x^3(x^3-8)\right]^{3/2}}\left(\cancel{x^6}-8x^3-\cancel{x^6}+16\right)$$

$$=\underbrace{\frac{-8\sqrt{3}\,x^2}{\left[x^3(x^3-8)\right]^{3/2}}}_{\geq 0}(x^3-2)\geq 0 \iff x>\underbrace{\sqrt[3]{2}}_{2}$$

Pertanto, f concava in $(-\infty,0)$ e

convessa in $[2,+\infty)$.