SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 dell'11/9/2023

①

1) $D_{conv} = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{2x^2}{n^2+x^2}\right)^{n^3}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{2x^2}{n^2+x^2}\right)^{-\left(\frac{n^2+x^2}{2x^2}\right)}\right]^{-\left(\frac{2x^2}{n^2+x^2}\right)n^3}$$

(Si osservi che $\forall x \in \mathbb{R}$ la base è definitivamente positiva, ~~cioè $\forall x \in \mathbb{R}$~~ cioè per $n \to +\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-\infty} = 0 \qquad \forall x \neq 0$$

Per $x = 0$: $\quad f_n(0) = 1^{n^3} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$D_{conv.\ sempl.} = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Poichè $f_n(x) \in C^0(\mathbb{R})$, ma $f(x)$ è discontinua in $x=0$

$\Rightarrow$ NON PUÒ ESSERCI CONVERGENZA UNIF. in $[0,a]$, $[-a,0]$.

$f_n(x), f(x)$ pari $\Longrightarrow$ studiarle in $(-\infty,-a]$ è la stessa cosa che in $[a,+\infty)$.

In $[a,+\infty)$, $a>0$: (2)

$$\lim_{x\to+\infty} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{x\to+\infty} |f_n(x)|$$

$$= \left|(-1)^{n^3}\right| = 1^{n^3} = 1$$

$$\Longrightarrow \sup_{[a,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| \geq 1 \not\to 0.$$

Potremo quindi verificare la convergenza uniforme lontano da 0 e da $\pm\infty$, cioè in $[a,b]$, con $0<a<b<+\infty$.

$\forall [a,b]$, definitivamente (per $n\to+\infty$)

$$1-\frac{2x^2}{n^2+x^2}>0$$

$$\Longrightarrow |f_n(x)-f(x)| = f_n(x)$$

$$= \left(1-\frac{2x^2}{n^2+x^2}\right)^{n^3}$$

$$|f_n(x)-f(x)|' = f_n'(x) = n^3\left(1-\frac{2x^2}{n^2+x^2}\right)^{n^3-1}$$

$$\cdot \left[-2\left(\frac{2x(n^2+x^2)-x^2\cdot 2x}{(n^2+x^2)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{-2n^3}{(n^2+x^2)^2}\left(1-\frac{2x^2}{n^2+x^2}\right)^{n^3-1} 2xn^2 > 0$$ 3

$$\Leftrightarrow \quad x<0$$

$\Rightarrow$ $|f_n(x)-f(x)|$ decresce in $[a,b]$

$$\Rightarrow \sup_{[a,b]} |f_n(x)-f(x)| = f_n(a)$$

$$= \left(1-\frac{2a^2}{n^2+a^2}\right)^{n^3} \longrightarrow 0,$$

come già visto.

2) Lungo asse x: $\lim_{x\to 0} f_n(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

~~Altrove~~:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\cancel{y}\frac{x^2}{\cancel{y}}\right|}{|x|+|y|}$$

$$\le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2|}{|x|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

f CONTINUA in (0,0).

$$\left.\begin{aligned} f(x,0)&=0\\ f(0,y)&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\beta \operatorname{sen}\left(\frac{t^{\cancel{2}}\alpha^2}{\cancel{t}\beta}\right)}{\cancel{t}|t|(|\alpha|+|\beta|)}$$

4

$(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$

Poichè α e β sono fissati e $t \to 0$

$$\Rightarrow \quad = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{\beta}\frac{t\alpha^2}{\cancel{\beta}}}{|t|(|\alpha|+|\beta|)}$$

$$= \frac{\alpha^2}{|\alpha|+|\beta|} \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} \quad \nexists$$

$\Rightarrow$ uniche derivate direzionali: le derivate parziali.

$\Rightarrow$ NON DIFFERENZIABILE

Infatti:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k \operatorname{sen}\left(\frac{h^2}{k}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}(|h|+|k|)} \quad \nexists,$$

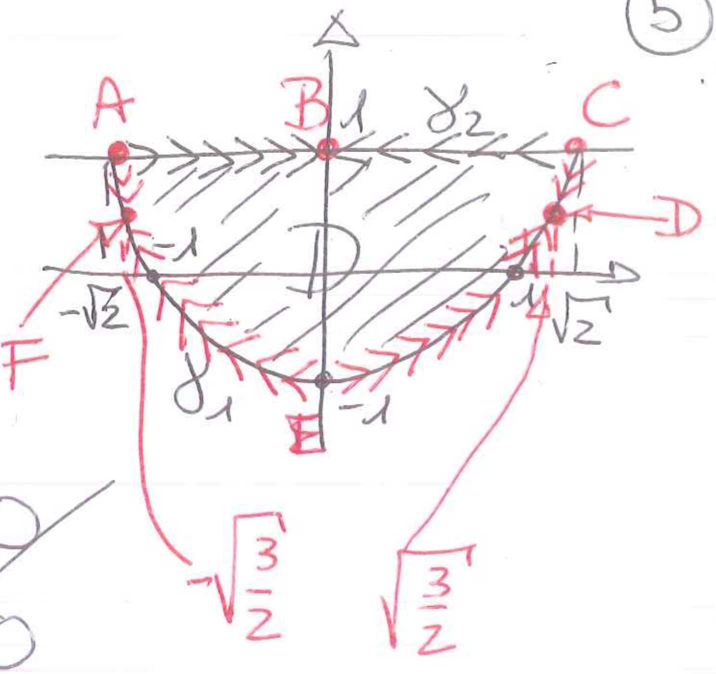
in quanto, muovendosi ad esempio lungo la retta $y=x$ $(k=h)$, abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}\right)}{\sqrt{2h^2}(2|h|)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2}}{2\sqrt{2}\,\cancel{|h|^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

(si ricordi che $h^2 = |h|^2$, in $\mathbb{R}$)

3) Punti interni:

$$\begin{cases} f_x = -2xy^2 e^{-yx^2} = 0 \\ f_y = e^{-yx^2}(1-yx^2) = 0 \end{cases}$$



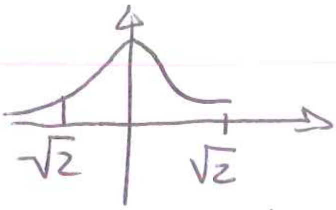
$$\Rightarrow \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}} \cup \cancel{\begin{cases} y = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}}$$

$\nexists$ punti stazionari interni.

La frontiera $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ è così parametrizzato:

$$\gamma_2: \begin{cases} x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \gamma_1: \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases}$$

$f|_{\gamma_2} = e^{-x^2}$ (gaussiana



Si osservi che $f(x,y)$ è simmetrica rispetto all'asse y: $f(-x,y) = f(x,y)$, quindi basterà studiare $f|_{\gamma_1}$ per $x \in [0, \sqrt{2}]$.

È preferibile operare la sostituzione $x^2 = y+1$.

$$f\big|_{\gamma_1} = y e^{-y(y+1)} \quad ; \quad y \in [0,1]$$

$$\left(f\big|_{\gamma_1}\right)' = e^{-y(y+1)}\left[1 - y(2y+1)\right]$$
$$= e^{-y(y+1)}\left[-2y^2 - y + 1\right] > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2y^2 + y - 1 < 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow f\big|_{\gamma_1}$ cresce per $y \in [0, \frac{1}{2})$ e decresce per $y \in (\frac{1}{2}, 1)$.

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad ; \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}}$$

Dalle frecce si evince che

A, C, E punti di MIN. REL.

B, D, F punti di MAX. REL.

$$f(A) = f(C) = f(\pm\sqrt{2}, 1) = e^{-2}$$

$$f(E) = f(0,-1) = -1 \quad \text{MIN. ASS.}$$

$f(D) = f(F) = f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}}$

$f(B) = f(0,1) = 1$ MAX. ASS.

4) Il campo è definito per $z \neq 0$. Poichè la curva giace sul piano $z=1$, ci mettiamo nel semispazio superiore $z>0$, che è ovviamente sempl. lin. connesso.

$\vec{F}$ è conservativo, in quanto irrotazionale:

$X_y = 2e^{x^2y}(x + x^3y) = Y_x$

$X_z = Z_x = Y_z = Z_y = 0$

Si osservi che $\vec{F} = \vec{F}_1(x,y) + \vec{F}_2(z)$

dove $\vec{F}_1 = \left(2xy\, e^{x^2y} - 1,\ x^2 e^{x^2y},\ 0\right)$

$\vec{F}_2 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}}\right)$

Cerchiamo i potenziali per $\vec{F}$:

$V = V_1 + V_2$

$V_2(z) = 3z^{\frac{1}{3}} + c_1 = 3\sqrt[3]{z} + c_1$

$$V_1(x,y) = \int x^2 e^{x^2 y}\,dy + \varphi(x)$$
$$= e^{x^2 y} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = 2xye^{x^2 y} + \varphi'(x) = 2xy\,e^{x^2 y} - 1$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -1 \Rightarrow \varphi(x) = -x + C_2$$

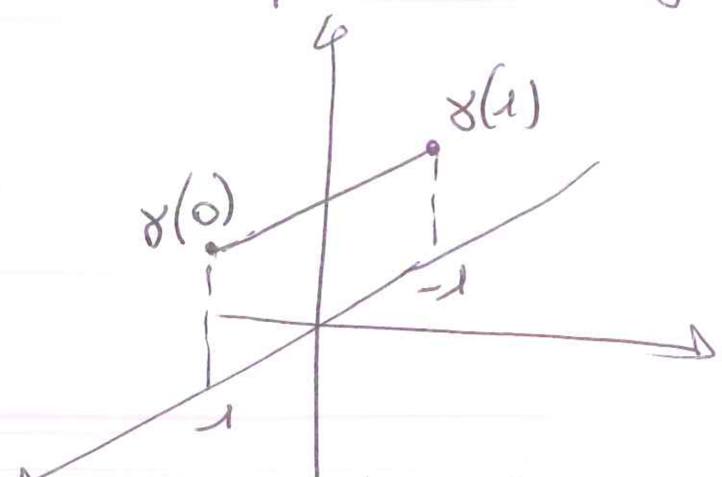
$$\Rightarrow V(x,y,z) = e^{x^2 y} - x + 3\sqrt[3]{z} + C$$

Poiché $\gamma(0) = (1,0,1)$; $\gamma(1) = (-1,0,1)$,

Avremo che $\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} = V(-1,0,1) - V(1,0,1)$

$$= 1 + 1 + 3 - (1 - 1 + 3) = 2.$$

In alternativa, avremmo potuto integrare $\vec{F}$ sul segmento congiungente $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$:



$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \in [-1,1] \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

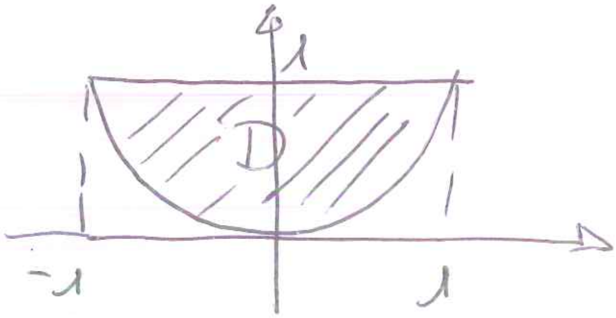
$dy = dz = 0$

percorso nel verso negativo:

$$\int_{\gamma} \vec{F}\cdot\vec{ds} = -\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

$$= \int_{1}^{-1} [-1] \, dt = 2.$$

5) Essendo la densità costantemente 1, allora



$$I = \iint_D \mathrm{dist}^2(0,P)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Si osservi che D è simmetrico rispetto all'asse y e f è pari rispetto all'asse y:

$$f(-x,y) = (-x)^2+y^2 = x^2+y^2 = f(x,y),$$

Quindi $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy$

$$= 2\int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} =$$

$$= 2\int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{3} - \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right)\right] dx$$

$$\cancel{= 2\int_0^1} = 2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21}\right] = 2\left[\frac{70-21-5}{105}\right]$$

$$= \frac{88}{105}.$$

6) ~~Le condizioni di esistenza e unicità NON sono rispettate. Infatti~~

Equazione a variabili separabili: le condizioni di esistenza e unicità NON sono rispettate. Infatti:

$a(x) = 2x \in C^0(\mathbb{R})$, ma

$b'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}$ NON è definita in $y=1$.

Non abbiamo garanzia di unicità del problema di Cauchy.
Infatti $y_1 \equiv 1$ è soluzione singolare del problema.
Inoltre, applicando il metodo di separazione delle variabili,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int 2x\,dx \qquad \text{con } y>1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y-1} = x^2 + C > 0$$

$$\Rightarrow y = 1 + \left(\frac{x^2+C}{2}\right)^2$$

$$y(2)=1 \Rightarrow 1 = 1 + \left(\frac{4+C}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow C = -4$$

$$\Rightarrow y = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - 2\right)^2 \qquad \text{con } x^2 > 4$$

cioè $x<-2$; $x>2$.
Prolungando per continuità fino in $x=2$, si ha $y_2(x) = 1 + \left(\frac{x^2}{2}-2\right)^2 \quad \forall x \geq 2$.

In realtà si può verificare che esistono infinite soluzioni del problema, ad esempio considerando (12)

$$y_3(x) = \begin{cases} 1 & \forall x < 2 \\ y_2(x) & \forall x \geq 2 \end{cases} \in C^1(\mathbb{R})$$

$$y_4(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - 2\right)^2 & \forall x < -2 \\ 1 & \forall x \geq -2 \end{cases} \in C^1(\mathbb{R})$$

$$y_5(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - 2\right)^2 & \forall x < -2 \\ 1 & \forall x \in [-2, 2] \\ 1 + \left(\frac{x^2}{2} - 2\right)^2 & \forall x > 2 \end{cases} \in C^1(\mathbb{R})$$

e così via.