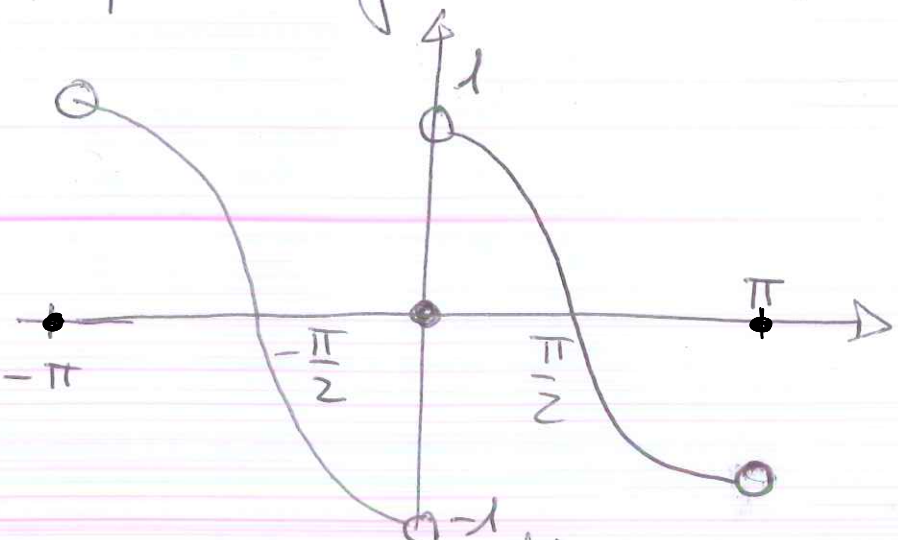
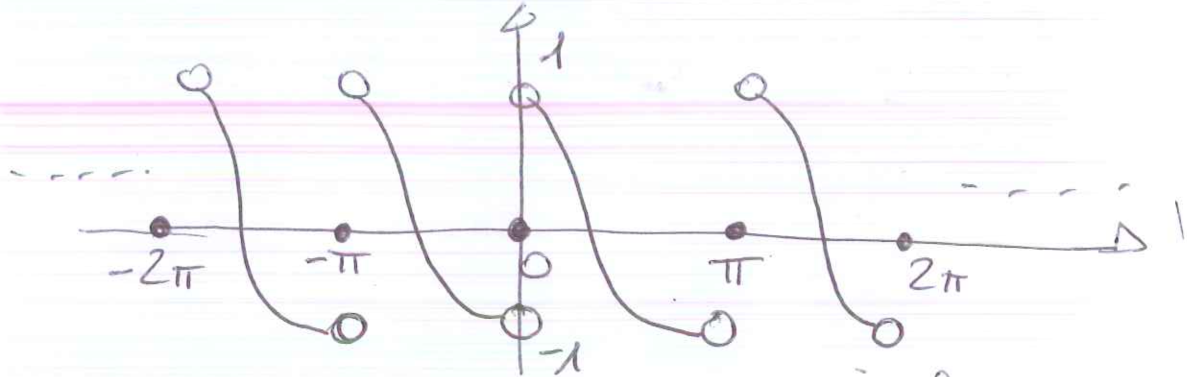
SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 - 13/9/2021

1) Il prolungamento dispari è



Funzione 2π-periodica:



La funzione, in realtà, si rivela essere π-periodica. Per definizione è dispari

$\Rightarrow \quad a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \cdot \operatorname{sen} kx \, dx$$

Si ha

$$\int_0^\pi \cos x \sin kx \, dx = \cancel{\sin x \sin kx \Big|_0^\pi} - k \int_0^\pi \sin x \cos kx \, dx$$

$$= +k \left[\cos x \cos kx \Big|_0^\pi + k \int_0^\pi \cos x \sin kx \, dx \right]$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \cos x \sin kx \, dx = \frac{1}{1-k^2} k \left[-(-1)^k - 1 \right]$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{2k}{\pi(k^2-1)} \left[1 + (-1)^k \right] = \begin{cases} \dfrac{8m}{\pi(4m^2-1)} & \text{se } k = 2m \\ 0 & \text{se } k = 2m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)} \sin(2mx)$$

La somma della serie è

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi \\ 0 & \text{se } x = k\pi \end{cases} = f(x).$$

Convergenza puntuale (a $f(x)$) su tutto $\mathbb{R}$. Convergenza uniforme in ogni compatto in cui f sia continua.

No convergenza totale. ③

Si osservi che la prima armonica è in corrispondenza di $k=2$. Questo è legato al fatto che $f(x)$ è π-periodica, come già osservato.

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{y=0\}$ la funzione è C^∞, quindi differenziabile.

In $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} 0 & \text{lungo l'asse } x \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2/y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\vartheta}{\rho \sin\vartheta \, \rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} \quad \nexists$$

$\Rightarrow$ NON differenziabile in $(0,0)$.

Si sarebbe potuto arrivare allo stesso risultato osservando che f NON è continua in $(0,0)$. Infatti $\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$ (4)

ma, lungo $y=x^2$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=1.$$

Negli altri punti dell'asse x $(x_0,0)$, con $x_0\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{x_0^2}{k}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{x_0^2}{k^2}=+\infty.$$

$\Rightarrow$ NON differenziabile in $(x_0,0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

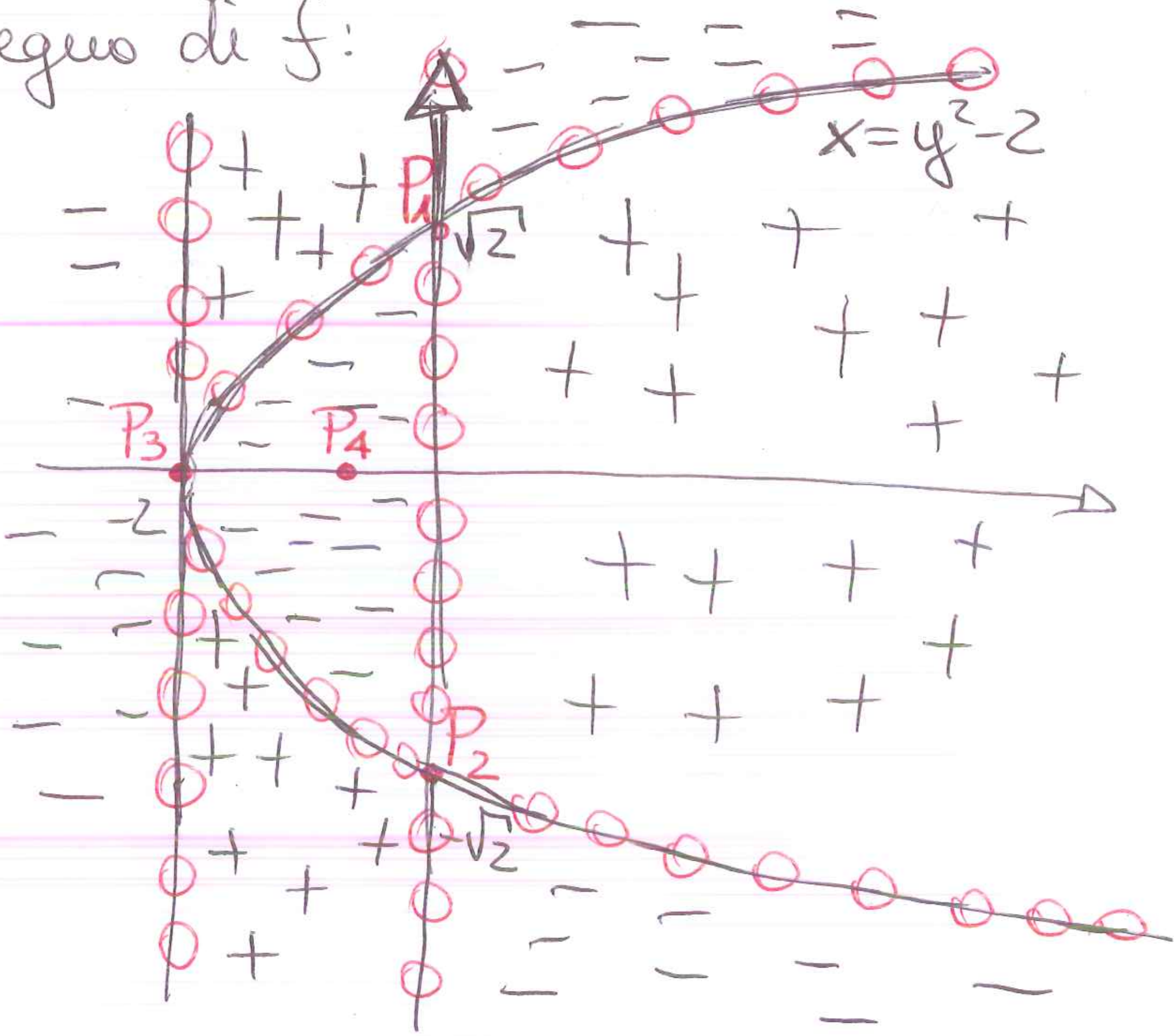
Oppure, analogamente, f NON continua in $(x_0,0)$, con $x_0\neq 0$, perchè, lungo la retta $x=x_0$,

$$\lim_{y\to 0^{\pm}} f(x_0,y)=\frac{x_0^2}{0^{\pm}}=\pm\infty.$$

3) f si annulla per $x=0$; per $x=-2$ e lungo la parabola $x=y^2-2$.

5

Segno di f:



Punti stazionari:

$$f(x,y)=x^3+4x^2+4x-x^2y^2-2xy^2$$

$$\begin{cases} f_x=3x^2+8x+4-2xy^2-2y^2 \\ f_y=-2yx(x+2) \end{cases}$$

$f_y = 0 \iff x=0 \vee y=0 \vee x=-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4-2y^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ 3x^2+8x+4=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-2 \\ \cancel{12}\cancel{-16}\cancel{+4}+4y^2-2y^2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{2} \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{3} = \begin{array}{l} -2 \\ -\frac{2}{3} \end{array} \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

6

$\Rightarrow P_1=(0,\sqrt{2})$; $P_2=(0,-\sqrt{2})$; $P_3=(-2,0)$;

$P_4=\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

A causa del segno di f, P_1, P_2 e P_3 sono punti di sella.

~~Per~~ P_4, essendo f simmetrica rispetto all'asse x, non può essere di sella.

Si intuisce che sia di MIN. REL.

Utilizziamo l'hessiano

$$f_{xx} = 6x + 8 - 2y^2$$

$$f_{yy} \cancel{= f_{yx}} = -2x(x+2)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -4xy - 4y = \cancel{-4(x+y)} -4y(x+1)$$

$$H\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$$

definita positiva $\Rightarrow P_4$ punto di MIN. REL.

Si osservi che

$$H(P_1) = H(0, \sqrt{2}) = \cancel{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(P_2) = H(0, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|H(P_1)| = |H(P_2)| = -32 < 0$$ $\Rightarrow$ P_1 e P_2 punti di sello

$$H(P_3) = H(-2, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

potrebbe essere punto di sello o di max. rel. Con lo studio del segno, si è in realtà appurato che è di sello.

Poichè $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} x(x+2)^2$ ⑧

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

allora $\nexists$ MAX. o MIN. ASSOLUTI.

4) ω è definita in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

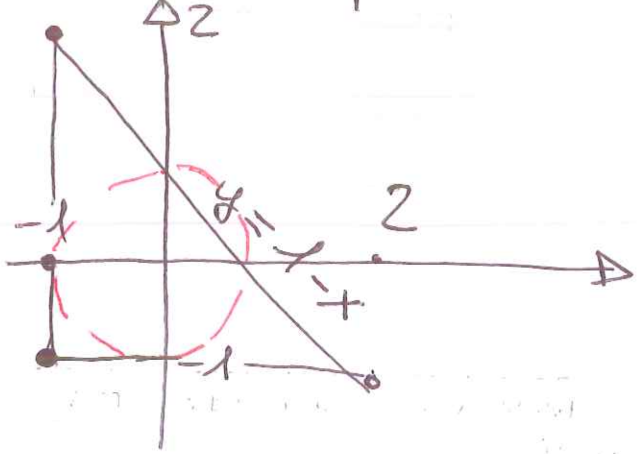
$\omega = \omega_1 + \omega_2$ con

$\omega_1 = (x+5)\,dx + y\,dy$ DEFINITA, CHIUSA ED ESATTA in $\mathbb{R}^2$

$\omega_2 = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$ DEFINITA in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, CHIUSA ma non ESATTA (come noto).

ω CHIUSA, ma NON ESATTA

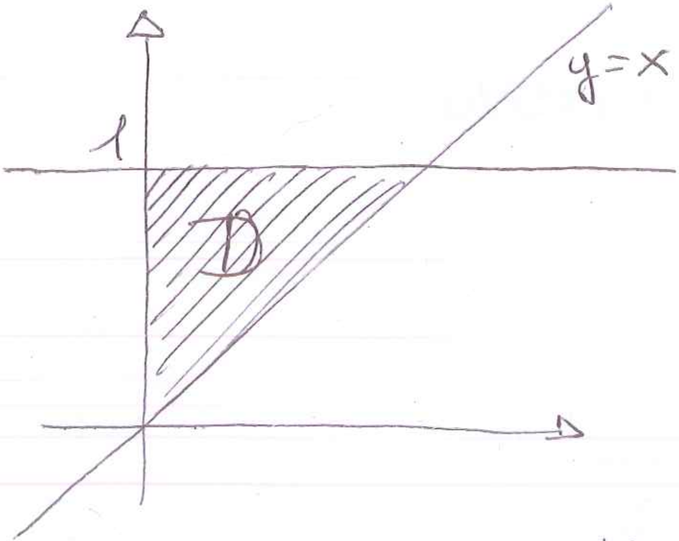
$$\oint_T \omega = \underbrace{\oint_T \omega_1}_{= 0 \text{ perchè esatta}} + \oint_T \omega_2$$



invece,

$$\oint_T \omega = \oint_T \omega_2 \overset{\text{come noto}}{=} \oint_{\{x^2+y^2=1\}} \omega_2 = 2\pi.$$

5)



Si osservi che la condizione di compatibilità $\frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{x+1}$ è rispettata in D. Infatti,

poiché $x, y \geq 0 \implies$

$$\frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{x+1} \iff x+1 \leq y+1$$

$$\iff 0 \leq x \leq y$$

$$\implies \mathrm{Vol}(\Omega) = \int_0^1 dy \int_0^y dx \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\right]$$

$$= \int_0^1 dy \left[\ln(|x+1|) - \frac{x}{y+1}\right]_0^y$$

$$= \int_0^1 \left[\ln(y+1) - \frac{y}{y+1}\right] dy$$

$$= \left[(y+1)\ln(y+1) - \cancel{1}\,(y+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{y+1}\right] dy$$

$$= 2\ln 2 - 2 + 1 - \Big[y - \ln(y+1)\Big]_0^1$$ (10)

$$= 2\ln 2 - 1 - \Big[1 - \ln 2\Big] = 3\ln 2 - 2 > 0$$

6) $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = e^{-x}\ln(e^x+2) \\ y(0) = 3 \end{cases}$ definite in $\mathbb{R}$

$$y(x) = e^{-2x}\left[3 + \int_0^x e^{2t} e^{-t} \ln(e^t+2)\,dt\right]$$

$$= e^{-2x}\left[3 + \int_0^x e^t \ln(e^t+2)\,dt\right]$$

$e^t = u \qquad u(x) = e^x \; ; \; u(0) = 1 \; ; \; du = e^t\,dt$

$$= e^{-2x}\left[3 + \left[\int_1^{e^x} \ln(u+2)\,du\right]\right] =$$

$$= e^{-2x}\left\{3 + \Big[(u+2)\ln(u+2) - (u+2)\Big]_1^{e^x}\right\}$$

$$= e^{-2x}\left[\cancel{3} + (e^x+2)\ln(e^x+2) - (e^x+2) - 3\ln 3 + \cancel{3}\right]$$ ok ok

$$= e^{-2x}\left[(e^x+2)\left(\ln(e^x+2) - 1\right) - 3\ln 3 + 6\right]$$

Poichè $a(x) = 2$, $f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 2)$ 11

sono $C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists!$ soluzione

su tutto $\mathbb{R}$ (sol. globale).