SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 14/7/2022.

1) CONTINUITÀ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x\left[\cancel{y^2} - \frac{y^4}{2} - \cancel{y^2} + o(y^4)\right]}{|x|+|y|} \right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \left| \frac{xy^4}{|x|+|y|} \right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \left| \frac{\cancel{x}y^4}{\cancel{x}} \right|$$

$$= 0.$$

$\Rightarrow$ f CONTINUA IN $(0,0)$.

$$f(x,0) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$f(0,y) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t \ln(1+\beta^2 t^2) - \alpha\beta^2 t^3}{t|t|\left[|\alpha|+|\beta|\right]}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha \cancel{t}\left[\cancel{\beta^2 t^2} - \frac{\beta^4 t^4}{2} - \cancel{\beta^2 t^2} + o(t^4)\right]}{\cancel{t}|t|\left[|\alpha|+|\beta|\right]}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\alpha\beta^4 |t|^{\cancel{4}\,3}}{2\cancel{|t|}\left[|\alpha|+|\beta|\right]} = 0 \quad \forall(\alpha,\beta).$$

DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{h\ln(1+k^2)-hk^2}{\sqrt{h^2+k^2}\,\left[|h|+|k|\right]} \right|$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{h\left[\cancel{k^2}-\frac{k^4}{2}-\cancel{k^2}+o(k^4)\right]}{\sqrt{h^2+k^2}\,\left[|h|+|k|\right]} \right|$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{2}\left[\left| \frac{hk^4}{\sqrt{h^2+k^2}\,\left[|h|+|k|\right]} \right|\right] \le \frac{1}{2}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{\cancel{h}k^{3}}{\cancel{h}k} \right|$$

$= 0.$

$\Rightarrow$ DIFFERENZIABILE in $(0,0)$.

2) f definita ~~per~~ in $D = \{y > x\}$

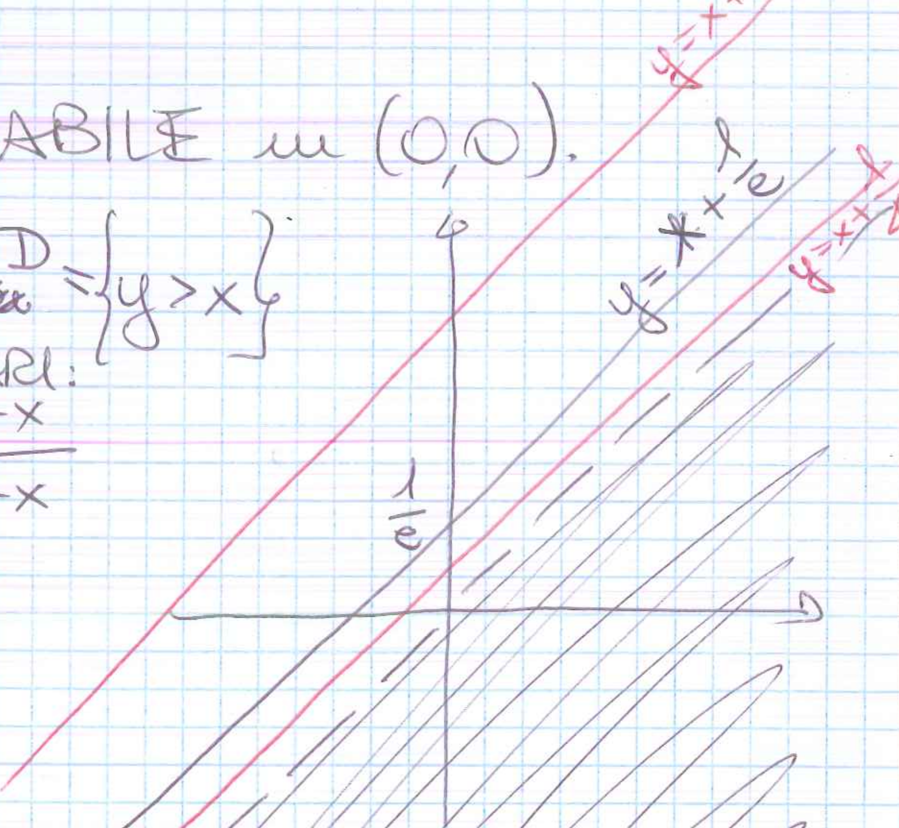
PUNTI STAZIONARI:

$$f_x = -\ln(y-x) - \frac{y-x}{y-x}$$

$$= -\left[\ln(y-x)+1\right]$$

$$f_y = \ln(y-x) + \frac{y-x}{y-x}$$

$$= \ln(y-x)+1$$



$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \ln(y-x) = -1 \iff y = x + \frac{1}{e}$$

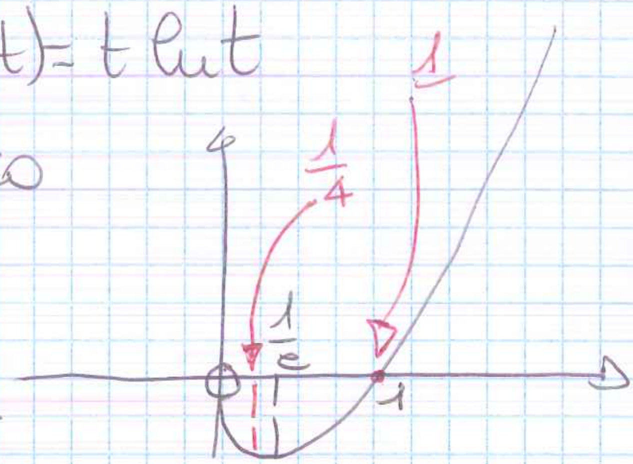
INFINITI PUNTI STAZIONARI.

N.B.: l'hessiano non dà informazioni:

$$|H_f(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{y-x} & -\frac{1}{y-x} \\ -\frac{1}{y-x} & \frac{1}{y-x} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall (x,y) \in D.$$

Poniamo $t = y - x \Rightarrow f(t) = t \ln t$

GRAFICO NOTO



$\Rightarrow t = \frac{1}{e}$ punto di MIN. ASSOLUTO.

Pertanto tutti i punti sulla retta $y = x + \frac{1}{e}$ sono di MINIMO ASSOLUTO. $f(x, x+\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

~~MASS~~ Si osservi che le rette $y = x + k$ sono curve di livello:

$$f(x, x+k) = k \ln k$$

Pertanto lungo $y = x + \frac{1}{4}$ PUNTI DI MAX. REL.

lungo $y = x + 1$ PUNTI DI MAX. REL.

Ma $f(x, x+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \ln 4$

$< f(x, x+1) = 0$

$\Rightarrow$ I punti lungo $y=x+1$ sono di MAX. ASS.
Infatti, studiando la restrizione di f lungo le due rette, si ottiene lo stesso risultato. 4

3) φ_n è definita in $\mathbb{R}$ $\forall n \Rightarrow D_{cont} = \mathbb{R}$

$$\varphi_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\forall x \neq 0 \quad \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{x^2/n^2} - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_{punt} = \mathbb{R}$$

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| = n\left|e^{x^2/n^2} - 1\right|$$

ma $\frac{x^2}{n^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$|\varphi_n - \varphi| = n\left(e^{x^2/n^2} - 1\right) \qquad \text{(FUNZIONE PARI)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |\varphi_n - \varphi| = \lim_{x\to\pm\infty} n\left(e^{x^2/n^2} - 1\right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ NO CONV. UNIF. in $\mathbb{R}$
Se però consideriamo, per comodità, un generico $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, allora

$$|\varphi_n - \varphi|' = \cancel{n}\,\frac{2x}{n^{\cancel{2}}}\,e^{x^2/n^2} > 0 \qquad \forall x > 0$$

$\Rightarrow |\varphi_n - \varphi|$ decrescente in $[-\alpha, 0)$; crescente in $(0,\alpha] \Rightarrow \sup_{[-\alpha,\alpha]} |\varphi_n - \varphi| = \varphi_n(\alpha)$

$$= n\left(e^{\alpha^2/n^2} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. in ogni $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha > 0$.

4) Si verifica facilmente che il campo è conservativo. Si può ottenere facilmente il potenziale osservando che

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{F}_1(x,y) + \vec{F}_2(x,y) + \vec{F}_3(y,z),$$

dove $\vec{F}_1(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy}) \Rightarrow V_1(x,y) = e^{xy} + C_1$

$\vec{F}_2(x,y) = (y^2, 2xy) \Rightarrow V_2(x,y) = xy^2 + C_2$

$\vec{F}_3(y,z) = (-ze^y, -e^y) \Rightarrow V_3 = -ze^y + C_3$

$$\Rightarrow V(x,y,z) = e^{xy} + xy^2 - ze^y + C.$$

Altrimenti, integrando prima Z,

$$\int Z\,dz = \int -e^y\,dz = -ze^y + \varphi(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[-ze^y + \varphi(x,y)\right] = \cancel{\varphi_z} \cancel{-ze^y} + \varphi_y =$$

$$Y = \cancel{x}e^{xy} + 2xy \cancel{- ze^y}$$

$$\Rightarrow \varphi_y(x,y) = xe^{xy} + 2xy$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \int \left[x e^{xy} + 2xy \right] dy$$

$$= e^{xy} + xy^2 + \psi(x)$$

$$\Rightarrow V(x,y,z) = e^{xy} + xy^2 - ze^y + \psi(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = ye^{xy} + y^2 + \psi'(x) = X = ye^{xy} + y^2$$

$$\Rightarrow \psi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \psi(x) = C$$

$$\Rightarrow V(x,y,z) = e^{xy} + xy^2 - ze^y + C$$

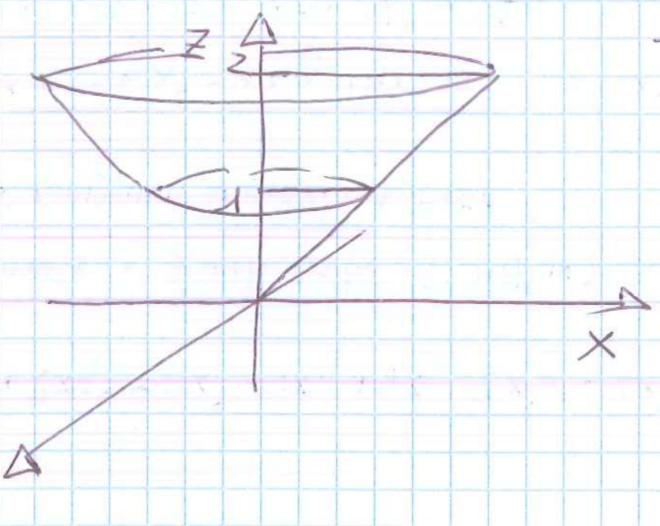
$$\vec{P}(0) = (0,0,1) \quad ; \quad \vec{P}(1) = \left(\ln 2, 2, \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds} = V\left(\ln 2, 2, \frac{1}{2} \right) - V(0,0,1)$$

$$= e^{2\ln 2} + 4\ln 2 - \frac{1}{2} e^2 + 1$$

$$= 4 + 4\ln 2 - \frac{1}{2} e^2 \cancel{+1} \cancel{-1}$$

5)



TRONCO DI CONO

$$\Phi_{\partial E}(\vec{F}) = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_E (\cancel{\cos x} + 1 - \cancel{\cos x})\,dx\,dy\,dz = \text{vol } E$$

$$= \frac{1}{3}\left[4\pi \cdot 2 - \pi\right] = \frac{7}{3}\pi.$$

6) Equazione definita per $x \neq -1$

Poiché $x_0 = 0 > -1$, allora studiamo il problema in $(-1, +\infty)$.

$A(x) = \frac{1}{x+1} \in C^{\infty}(-1, +\infty)$

$B(y) = (y-4)(y+1) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

Equazione a variabili separabili $\Rightarrow \exists!$ sol. LOCALE.

$y_1 = 4$; $y_2 = -1$ sol. singolari.

$\Rightarrow$ Il secondo problema ha l'unica sol.

$y_2 = -1$.

Per il primo problema applichiamo il metodo di separazione delle variabili.

$$\int \frac{dy}{(y-4)(y+1)} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\frac{1}{5}\int \left[\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y+1}\right] dy = \ln(|x+1|) + C$$

$$\Downarrow \; x > -1$$

$$\frac{1}{5}\ln\left(\left|\frac{y-4}{y+1}\right|\right) = \ln(x+1) + C$$

$$\frac{1}{5}\ln\left(\left|\frac{1}{6}\right|\right) = C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{5}\ln 6$$

Poiché $y_0 = y(0) = 5 \Rightarrow y-4>0 \; ; \; y+1>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\ln\left(\frac{y-4}{y+1}\right) = \ln(x+1) - \frac{1}{5}\ln 6$$

$$\ln\left(\frac{y-4}{y+1}\right) = \ln(x+1)^5 - \ln 6 = \ln\left[\frac{(x+1)^5}{6}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{y-4}{y+1} = \frac{(x+1)^5}{6} \Rightarrow y-4 = (y+1)\left[\frac{(x+1)^5}{6}\right]$$

$$\Rightarrow y\left[1 - \frac{(x+1)^5}{6}\right] = 4 + \frac{(x+1)^5}{6}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{24 + (x+1)^5}{6 - (x+1)^5}$$

Si osservi la natura locale della soluzione del primo problema, in quanto y è definita per

$$\begin{cases} x>-1 \\ 6-(x+1)^5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x+1 \neq \sqrt[5]{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in \left(-1+\sqrt[5]{6}, +\infty\right).$$

La soluzione del secondo problema, invece, è definita $\forall x \in (-1, +\infty)$.