SVOLGIMENTI PROVE SCRITTE di ANALISI 2 del 16/7/2018

A1

$\boxed{\text{COMPITO A}}$

1) $f_n(1) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\forall x \in (0,+\infty),\ x \neq 1$

$$x^{-n} \longrightarrow \begin{cases} 0 & x > 1 \\ +\infty & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & x \geq 1 \\ +\infty & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\phi = [1,+\infty)$. $f(x) = 0$.

CONV. UNIFORME:

$$|f_n - f| = (x-1)x^{-n}$$

$$|f_n - f|' = \frac{x^n - nx^{n-1}(x-1)}{x^{2n}} = \frac{[n+(1-n)x]}{x^{n+1}} > 0$$

$\cancel{\max(|f_n - f|) = f_n}$ $\iff$ $x < \frac{n}{n-1}$

$$\max(|f_n - f|) = f_n\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e \cdot \infty}$$

$= 0$ $\Rightarrow$ CONV. UNIF. in $[1,+\infty)$.

2) $$f(x,y) = \begin{cases} xy & 1^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ quadrante} \\ -xy & 2^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrante} \end{cases}$$

A_2

$f(x,y) = 0$ lungo gli assi.

Nei quadranti <u>aperti</u>:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y & 1^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ quadrante} \\ -y & 2^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrante} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x & 1^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ quadrante} \\ -x & 2^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrante} \end{cases}$$

Lungo l'asse x $\quad f(x,0) \equiv 0$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial f}{\partial x} = 0} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$$

Lungo l'asse y $\quad f(0,y) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$

~~Lungo l'asse x (x ≠ 0)~~

Ne segue che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Lungo l'asse x $\quad (x \neq 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{k \to 0^\pm} \frac{|x_0 k|}{k} = \cancel{x_0} \pm x_0$$

$$\nexists \; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$$

lungo l'asse y $(y \neq 0)$ A3

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \to 0^\pm} \frac{|h\, y_0|}{h} = \pm |y_0|$$

$$\nexists \ \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$$

È quindi evidente che, non esistendo $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, f NON è differenziabile in $(1,0)$.

DIFFERENZIABILITÀ in $(0,0)$:

$$0 \leq \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 |\cos\vartheta \sin\vartheta|}{\rho}$$

$$\leq \lim_{\rho \to 0} \rho = 0.$$

f è DIFFERENZIABILE in $(0,0)$.

3) Si osservi che f è definita se

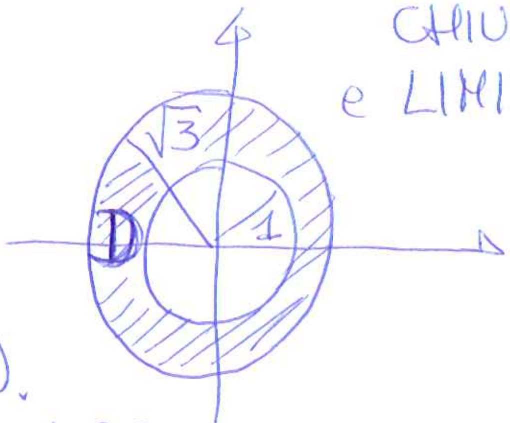
$$(x^2+y^2-2)^2 \leq 1 \iff 1 \leq x^2+y^2 \leq 3$$

f è definita nella corona circolare. DOMINIO CHIUSO e LIMITATO

Ovviamente, $f(x,y) \geq 0$

Poiché $f(x,y) = 0$ lungo la frontiera della corona,

$\Rightarrow$ tali punti sono di MIN. REL. e ASS.



(A4)

Inoltre, poichè $f(x,y) \le 1$ e $f(x,y)=1$ lungo la circonferenza $x^2+y^2=2$, i punti di tale circonferenza sono di MAX. REL. e ASS.

In formule: all'interno della corona:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{4\left[1-(x^2+y^2-2)^2\right]^{\frac{3}{4}}} \cdot 4(x^2+y^2-2)x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \quad '' \qquad\qquad '' \quad \cdot y$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \iff (x^2+y^2-2)x = 0 \\ f_y = 0 \iff (x^2+y^2-2)y = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \boxed{x^2+y^2=2} \\ 0=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ (y^2-2)y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \notin D$$

già inclusi nella circonferenza $x^2+y^2=2$

Quindi gli unici punti stazionari (A5)
appartengono alla circonferenza $x^2+y^2=2$.
Come detto, si verifica facilmente che

$$f(x,y) \le f\Big|_{x^2+y^2=2} = 1 \implies \text{PUNTI DI MAX. REL. e ASS.}$$

Le derivate NON sono definite per
$x^2+y^2=3$; $x^2+y^2=1$, che però sono
punti di frontiera.
Sulla frontiera: $f\Big|_{x^2+y^2=1} = f\Big|_{x^2+y^2=3} = 0$

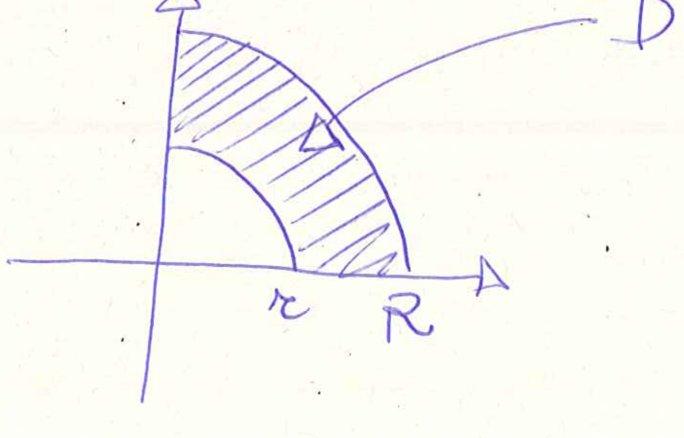
PUNTI DI MIN. REL. e ASS.

4) $\operatorname{div}\vec{F} = \cancel{-2x} + \cancel{2x} \cancel{-2yz} + \cancel{2yz} + 4z^3$

$$\Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\vec{F}) = \iiint_{C} 4z^3\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 4z^3\,dz = z^4\Big|_0^1 = 1$$

5)



In coordinate polari: (A6)

$$0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\,; \quad r \le \rho \le R$$

$$\iint_D x e^{y}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_r^R \rho^2 \cos\vartheta\, e^{\rho \sin\vartheta}\, d\rho$$

$$= \int_r^R \rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho\cos\vartheta) e^{\rho \sin\vartheta}\, d\vartheta$$

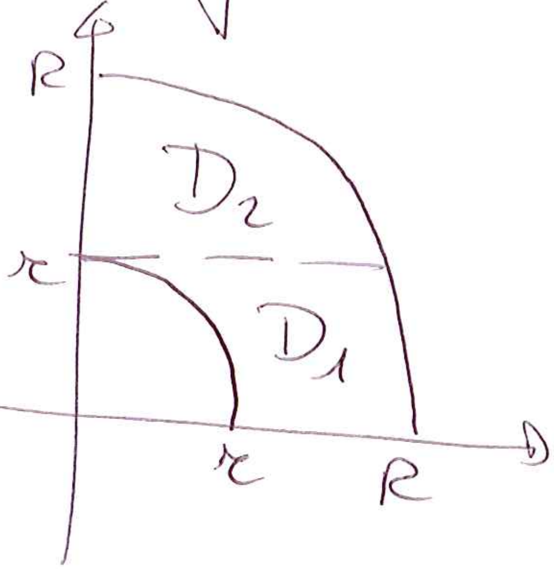
$$= \int_r^R \rho\, d\rho \left[e^{\rho \sin\vartheta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_r^R \rho \left[e^{\rho} - 1 \right] d\rho$$

$$= \left[\rho e^{\rho} \Big|_r^R - \int_r^R e^{\rho} d\rho - \frac{\rho^2}{2} \Big|_r^R \right]$$

$$\cancel{= R(e^R - 1) - r(e^r - 1) - e^R + e^r}$$

$$= (R-1)e^R - (r-1)e^r - \frac{1}{2}(R^2 - r^2)$$

In alternativa (e come verifica) scriviamo il dominio in forma x-semplice: $\boxed{A_7}$



$$D_1 = \left\{ y \in [0, r] ; \; \sqrt{r^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ y \in [r, R] ; \; 0 \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \right\}$$

$$\Rightarrow \iint_D x e^y \, dx\, dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} =$$

$$\int_0^r e^y dy \int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x\, dx + \int_r^R e^y dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} x\, dx$$

$$= \int_0^r e^y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dy + \int_r^R e^y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dy$$

$$= \int_0^r \frac{1}{2} e^y \left[R^2-y^2-(r^2-y^2)\right] dy + \frac{1}{2}\int_r^R (R^2-y^2) e^y dy$$

A8

$$= \frac{1}{2}\Big[(R^2 - r^2) e^y \Big|_0^r + R^2 e^y \Big|_r^R$$

$$- \Big(y^2 e^y \Big|_r^R - \int_r^R 2y e^y \, dy \Big) \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(R^2 - r^2)(e^r - 1) + R^2 (e^R - e^r)$$

$$- (R^2 e^R - r^2 e^r) + 2 \Big(y e^y \Big|_r^R - (e^R - e^r) \Big) \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(R^2 - r^2)(e^r - 1) + R^2 (e^R - e^r)$$

$$- R^2 e^R + r^2 e^r + 2 \big(R e^R - r e^r - e^R + e^r \big) \Big]$$

$$= (1 - r) e^r + (R - 1) e^R + \frac{1}{2}(r^2 - R^2).$$

COMPITO B

B1

1) $x = 0$: $\quad f_k(0) = 0 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$\forall x > -1\ ;\ x \neq 0$:

$$(x+1)^{-k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x) = 0 \quad ; \quad \Phi = [0, +\infty)$$

CONV. UNIFORME:

$$|f_k - f|(x) = f_k(x) = \frac{x}{(x+1)^k}$$

$$|f_k - f|'(x) = \frac{(x+1)^k - k(x+1)^{k-1}x}{(x+1)^{2k}}$$

$$= \frac{(1-k)x+1}{(x+1)^{k+1}} > 0 \iff x < \frac{1}{k-1}$$

$$f_k\left(\frac{1}{k-1}\right) = \frac{1}{k-1}\left(\frac{k}{k-1}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{e}{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \text{CONV. UNIF. in } \Phi = [0, +\infty).$$

IL RESTO DEGLI ESERCIZI È SIMILARE ALLA VERSIONE A