SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA ANALISI 2
del 16/7/2020.

1) Poichè $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$

(convergenza a e^t $\forall t \in \mathbb{R}$; convergente totale $\forall [a,b] \subseteq \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \quad e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$

(convergenza a e^{-x^2} $\forall x \in \mathbb{R}$).

Per le proprietà delle serie di potenze, anche $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ convergerà a F

la serie di

in tutto $\mathbb{R}$ e

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}.$$

2)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{lungo gli assi} \\ (xy)^\alpha & \text{se } xy>0 \\ & \text{(1° e 3° quadrante)} \\ (-xy)^\alpha & \text{se } xy<0 \\ & \text{(2° e 4° quadrante)} \end{cases}$$

Poichè $\alpha>0$, $f\in C^0(\mathbb{R}^2)$

Detto $D = \mathbb{R}^2 - (\{x=0\}\cup\{y=0\})$

$\Rightarrow f\in C^\infty(D) \Rightarrow$ differenziabile, derivabile lungo ogni direzione e continua in D.

Ricordiamo che $|x|' = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sign} x$

$\Rightarrow$ In D:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y|^\alpha \frac{\partial}{\partial x}(|x|^\alpha) = \alpha|y|^\alpha |x|^{\alpha-1}\cdot\frac{\partial|x|}{\partial x}$$

$$= \alpha\frac{|y|^\alpha|x|^\alpha}{x}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha\frac{|y|^\alpha|x|^\alpha}{y}.$$

In (0,0):

$$f(tx,ty) = |tx\,ty|^{\alpha} = |t|^{2\alpha}|xy|^{\alpha}$$
$$= |t|^{2\alpha} f(x,y)$$

$\Rightarrow$ 2α-omogenea.

Se $2\alpha > 1$ $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow$ differenziabile anche in (0,0) e quindi derivabile e continua.

Se $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ f CONTINUA, ma NON differenziabile in (0,0).

N.B.: $\forall \alpha > 0$ $f(x,0) = f(0,y) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

DER. DIR.:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{|tv_1\,tv_2|^{\alpha}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{2\alpha}|v_1v_2|^{\alpha}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{2\alpha}}{t}|v_1v_2|^{\alpha} = 0 \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

(infatti in tal caso f è differenziabile).

Per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t \to 0^{\pm}} \frac{|t|\sqrt{|v_1 v_2|}}{t} = \pm\sqrt{|v_1 v_2|}$$

$$\Rightarrow \nexists$$

Per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$\nexists \ \frac{df}{d\vec{v}}(0,0)$, a parte i casi $v_2 = 0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)$ e $v_1 = 0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$

<u>Nel generico punto $(x_0, 0)$ $(x_0 \neq 0)$:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, k) - f(x_0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{|x_0 k|^{\alpha}}{k} = |x_0| \lim_{k \to 0} \frac{|k|^{\alpha}}{k} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \nexists & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Quindi per $\alpha \leq 1$ f NON è neanche differenziabile.

Per $\alpha > 1$:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, tv_2) - f(x_0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|(x_0+tv_1)tv_2|^\alpha}{t} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_2 = 0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right) \\ |x_0 v_2|^\alpha \lim\limits_{t\to 0} \frac{|t|^\alpha}{t} = 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \nexists & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

differenziabilità in $(x_0,0)$ per $\underline{\underline{\alpha > 1}}$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,k) - f(x_0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,h)\to(0,0)} \frac{|(x_0+h)k|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} = \text{(coordinate polari decentrate)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{|\cos\theta \sin\theta|^\alpha \rho^{2\alpha}}{\rho} = 0 \iff \begin{cases} \alpha > \frac{1}{2} \\ \alpha > 1 \end{cases}$$

(ricordiamo infatti che, non esistendo entrambe le derivate parziali per $\alpha \leq 1$, possiamo considerare solo $\alpha > 1$) $\Rightarrow$ diff.bile se $\alpha > 1$.

3) Poichè $\cosh t \geq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, allora il denominatore non si annulla mai. ⑥

f è definita in tutto $\mathbb{R}^2$.

Inoltre $\min(\cosh t) = \cosh 0 = 1$

$\Rightarrow$ il denominatore assume il minimo in $(x,y)=(1,1)$

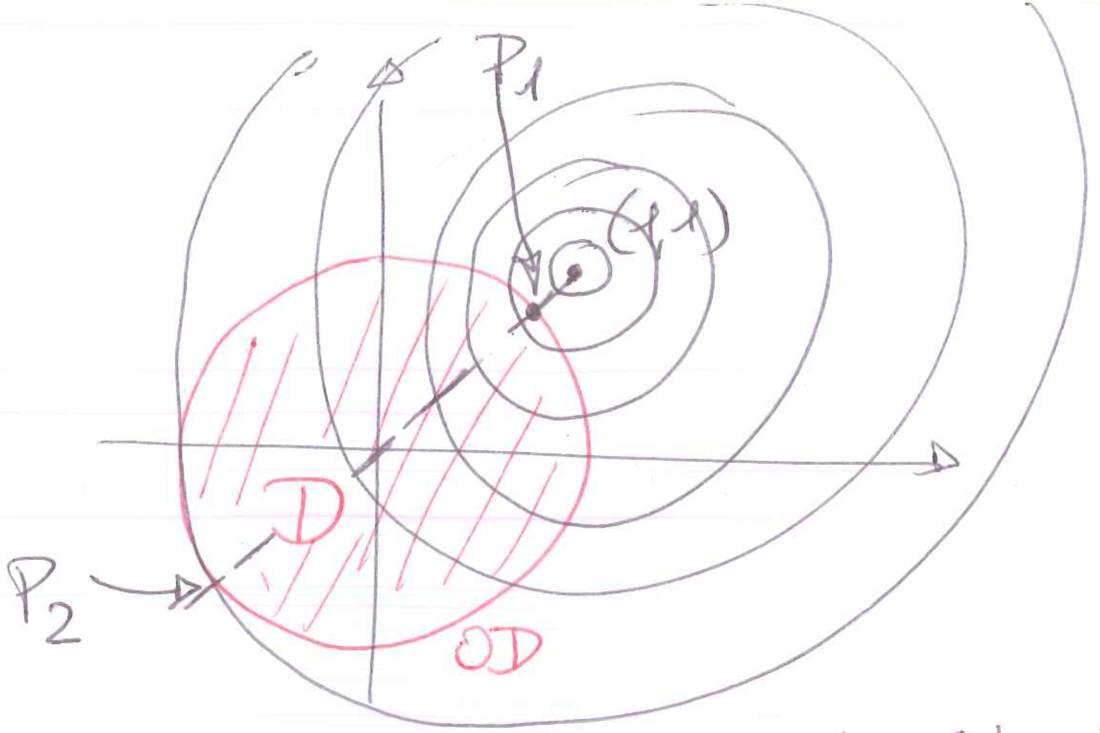
$$f(1,1) = \frac{1}{\cosh 0} = 1$$

Poichè f è il reciproco di una funzione positiva, allora assume il MAX. ASS. in $(1,1)$. Tale punto NON appartiene a D.

Si osservi che, usando le coordinate polari decentrate $\begin{cases} x = 1+\rho\cos\vartheta \\ y = 1+\rho\sin\vartheta \end{cases}$

$$f(\rho,\vartheta) = \frac{1}{\cosh(\rho^2)} \leq 1$$

le linee di livello sono dunque circonferenze. Più è grande ρ, più il valore di f è piccolo.



Quindi il MAX. ASS. di $f|_D$ è nel punto di MINIMA distanza da $(1,1)$. Tale punto sta sulla circonferenza ∂D ed è $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Il MIN. ASS. di $f|_D$ è nel punto di MASSIMA distanza da $(1,1)$. Tale punto sta sulla circonferenza ∂D ed è

$$P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$f(P_1) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\cosh\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{\cosh\left[(\sqrt{2}-1)^2\right]}$$

MAX. ASS. in D.

$$f(P_2) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\cosh\left[2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right]^2} = \frac{1}{\cosh\left[(\sqrt{2}+1)^2\right.}$$

MIN. ASS. in D.

Altrimenti, con le derivate:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-2\sinh(\ )\cdot(x-1)}{\cosh^2(\ )} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2\sinh(\ )\cdot(y-1)}{\cosh^2(\ )} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sinh\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]\cdot(x-1)=0 \\ \sinh\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right](y-1)=0 \end{cases}$$

Si osservi che il seno iperbolico si annulla solo in (1,1), ~~mentre~~ soluzione data anche dalle altre condizioni. Ma $(1,1) \notin D$.

Non ci sono punti interni stazionari!

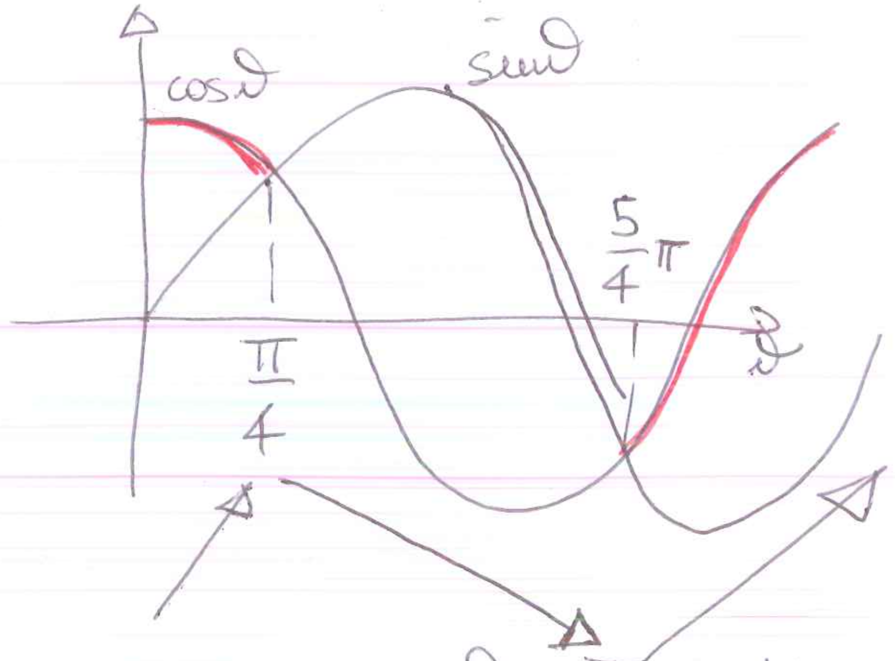
Sul vincolo:

$$f\Big|_{\partial D} = \frac{1}{\underbrace{\cosh\left[\underbrace{(\cos\vartheta-1)^2+(\sin\vartheta-1)^2}_{\text{sempre} > 0}\right]}_{\text{sempre} > 0}}$$

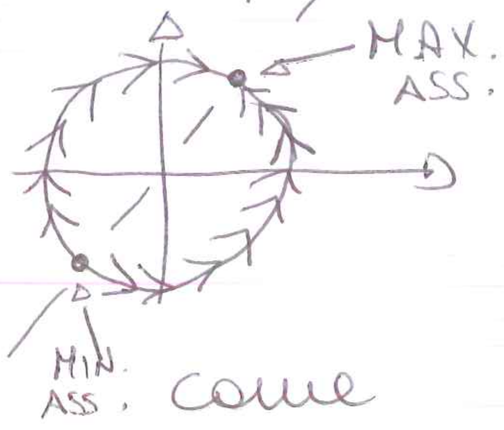
$$= \frac{1}{\cosh\left(3-2\cos\vartheta-2\sin\vartheta\right)}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(f\Big|_D\right) = \frac{-2}{\underset{>0}{\cosh^2(\ )}}\cdot \overbrace{\sinh(\underbrace{\ \ \ }_{\text{sempre}\,>0})}^{\text{sempre}\,>0}\cdot\left[\sin\vartheta - \cos\vartheta\right]$$

$$\geq 0 \iff \cos\vartheta - \sin\vartheta \geq 0$$



MAX. ASS. per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$; MIN. ASS. per $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$



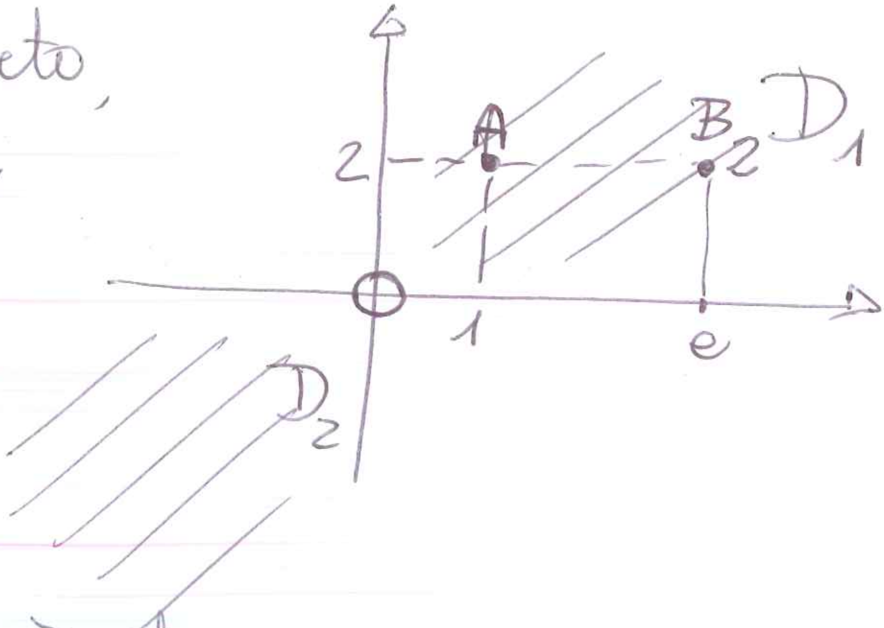
come prima.

$$f\Big|_D\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cosh\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right]}$$

$$f\Big|_D\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{1}{\cosh\left[2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\right]}$$

4) $D=\left\{\frac{y}{x}>0\right\}=\{x,y>0\}\cup\{x,y<0\}$

dominio aperto,
SCONNESSO,
illimitato



La curva γ è t.c.

$A=\gamma(0)=(1,2)$; $B=\gamma(1)=(e,2)$.

γ è contenuta nel primo quadrante

$$\left(x(t)=e^t>0\ ;\ y(t)=\overset{2+}{\sqrt{\log}}(1+\sin(\pi t))\geq 2 \quad \forall t\in[0,1]\right)$$

Quindi studiamo ω in D_1. In tale quadrante $\log\left(\frac{y}{x}\right)=\log(y)-\log(x)$.

D_1 è sempl. lin. connesso.

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\log\left(\frac{y}{x}\right)-1+y\left(\frac{1}{y}\right)=\log\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\log\left(\frac{y}{x}\right)+1-x\left(\frac{1}{x}\right)=\overset{\parallel}{\log}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ω CHIUSA in D_1 $\Rightarrow$ esatta in D_1.

$$\int_\gamma \omega = \int_{\overline{AB}} \omega \qquad \overline{AB}: \begin{cases} y=2 & (dy=0) \\ x=t & t\in[1,e] \end{cases}$$

$$= \int_1^e 2\left[\log 2 - \log t - 1\right]dt$$

$$= 2\left[\left(\log 2 - \cancel{1}\right)t - \left(t\log t - \cancel{t}\right)\right]_1^e$$

$$= 2t\log\left(\frac{2}{t}\right)\Big|_1^e = 2\left[e\log\left(\frac{2}{e}\right) - \log 2\right]$$

$$= 2\left[(e-1)\log 2 - e\right].$$

Altrimenti, si può calcolare un potenziale

$$U(x,y) = \int y\left[\log(y) - \log(x) - 1\right]dx$$

$$= y\left\{\left[\log(y) - \cancel{1}\right]x - \left(x\log x - \cancel{x}\right)\right] + \varphi(y)$$

$$= xy\log\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x\left[\log\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right] + \varphi'(y) = Y(x,y)$$

$$= x\left(\log\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

$$\Rightarrow U(x,y) = xy \log\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = U(e,2) - U(1,2)$$

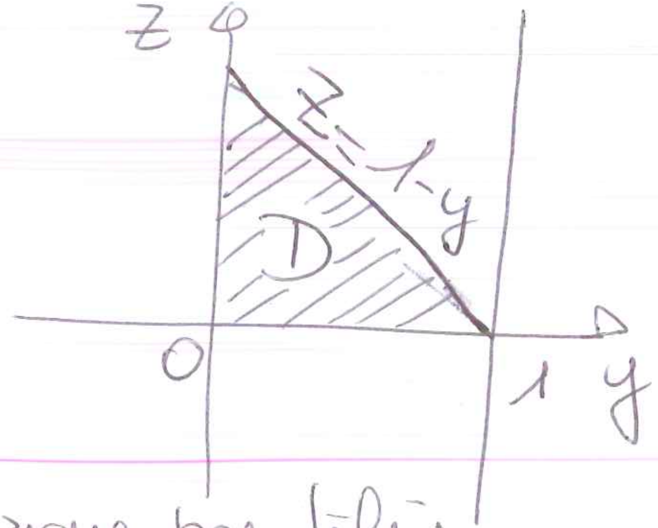
$$= 2e \log\left(\frac{2}{e}\right) - 2\log 2$$

(come prima).

5) Condizione di compatibilità:

$$0 \leq 2(1-y-z) \iff \underbrace{z \leq 1-y}$$

Condizione rispettata dal dominio $D(y,z)$:



$\Rightarrow$ integrazione per fili:

$$\iiint_{\Omega} y^2\,dx\,dy\,dz = \iint_{D(y,z)} y^2\,dy\,dz\,\left[2(1-y-z)\right]$$

$$= 2\int_0^1 y^2\,dy \int_0^{1-y} (1-y-z)\,dz$$

⑬

$$= 2\int_0^1 y^2 \cancel{dy} \left[z - zy - \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-y} dy$$

$$= 2\int_0^1 y^2 \left[(1-y) - y(1-y) - \frac{(1-y)^2}{2} \right] dy$$

$$= 2\int_0^1 y^2 (1-y) \left[(1-y) - \frac{(1-y)}{2} \right] dy$$

$$= \int_0^1 y^2 (1-y)^2 dy$$

$$= \int_0^1 (y^4 - 2y^3 + y^2) dy = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{6-15+10}{30} = \frac{1}{30}.$$