SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 17/7/2023

1) $\forall x \neq 0 \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 - 1 = 0$

$x = 0: \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$

$\Rightarrow$ la funzione limite è $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$

$D_{conv} = D_{conv.\,sempl} = \mathbb{R}.$

1) Poiché $f_n(x) \in C^0(\mathbb{R})$ e $f(x) \notin C^0([0,a]) \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$ in $[0,a]$.

In $[a,+\infty)$, con $a>0$:

$$\sup_{[a,+\infty)} |f_n - f| = \sup_{[a,+\infty)} \left| e^{\frac{x}{n}} - \frac{nx^2}{nx^2+1} \right|$$

Ma $\lim_{x\to+\infty} \left| e^{\frac{x}{n}} - \frac{nx^2}{nx^2+1} \right| = e^{+\infty} - 1 = \infty$

$\Rightarrow$ NO CONV. UNIF. in $[a,+\infty)$, con $a>0$.

2) In $[a,b]$, con $0<a<b<+\infty$:

$$\sup_{[a,b]} \left| e^{\frac{x}{n}} - \frac{nx^2}{nx^2+1} \right| = \sup_{[a,b]} \left| e^{\frac{x}{n}} - 1 + \frac{1}{nx^2+1} \right|$$

$$\leq \sup_{[a,b]} \left| e^{\frac{x}{n}} - 1 \right| + \sup_{[a,b]} \left| \frac{1}{nx^2+1} \right|$$

$$= \sup_{[a,b]} \left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right) + \sup_{[a,b]} \underbrace{\frac{1}{nx^2+1}}_{\text{minoro il denominatore}}$$

crescente

$$= e^{\frac{b}{n}} - 1 + \frac{1}{na^2+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. in ogni $[a,b]$, con $0 < a < b < +\infty$.

2) ~~Co~~ Puntiamo direttamente alla differenziabilità:

$$f(0,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$f(x,0) = \frac{|x| \sin^2(x)}{|x| + x^2} = \frac{\sin^2 x \, |x|}{|x| \, (1+|x|)} = \frac{\sin^2 x}{1+|x|}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+|x|)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1+|x|)} \cdot x = 0.$$

$\to 1$

DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{\left(\frac{|h| \sin^2(h-k)}{|h-k| + h^2} \right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \cancel{\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho |\cos\vartheta| \sin^2\left(\rho \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}\right)}{\rho \cdot \rho \, (|\cos\vartheta - \sin\vartheta|}}$$

$$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{|h| (h-k)^2}{(|h-k| + h^2) \sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$\leq \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|h| (|h-k|)^{\cancel{2}}}{\cancel{|h-k|} \sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\cancel{|h|} (|h-k|)}{\cancel{|h|}} = 0.$$

$\Rightarrow$ f continua in $(0,0)$

f derivabile direzionalmente in $(0,0)$

e (formula del gradiente)

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{v} = 0 \qquad \forall \vec{v}.$$

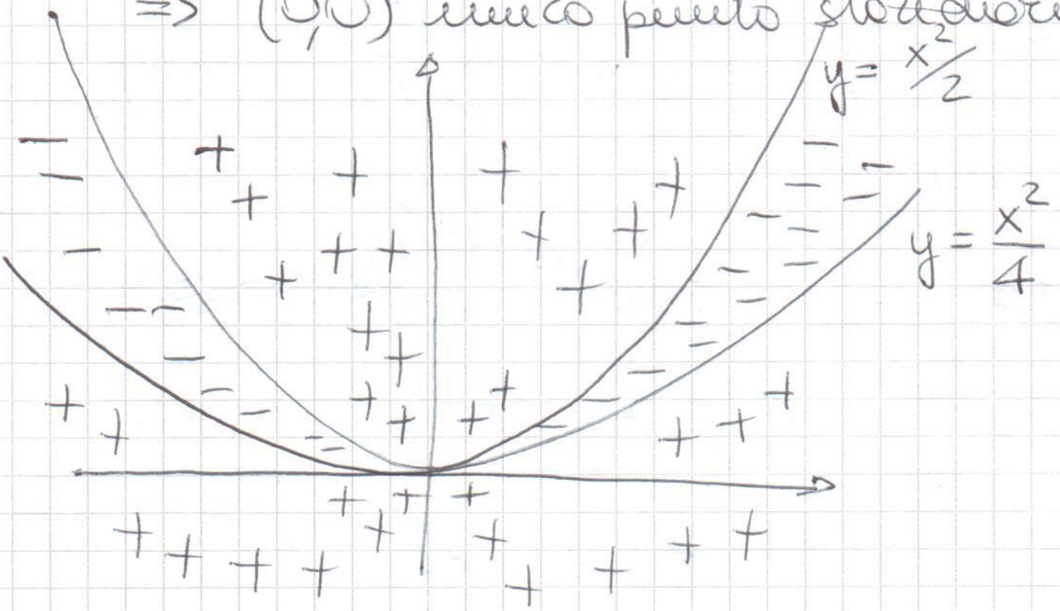
3) $f(x,y) = 8y^2 - 6yx^2 + x^4$

$$f_x = -12yx + 4x^3 = 4x\,(x^2 - 3y)$$

$$f_y = 16y - 6x^2 = 2\,(8y - 3x^2)$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ unico punto stazionario.



Pertanto $(0,0)$ è punto di sella.

Inoltre, ad esempio, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty$

f illimitata superiormente $\Rightarrow \nexists$ MAX. ASS.

Se poi restringiamo f lungo $y = \frac{x^2}{3}$ $\Rightarrow$

$$f\Big|_{y=\frac{x^2}{3}} = \frac{8}{9}x^4 - 2x^4 + x^4 = -\frac{1}{9}x^4 \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -\infty$$

f illimitata inferiormente $\Rightarrow \nexists$ MIN. ASS.

Si osservi che, se avessimo scelto come restrizioni rette passanti per l'origine $y = mx$

$\boxed{\text{o l'asse } y \ \left(x=0 \Rightarrow f(0,y) = 8y^2 \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} +\infty\right) \text{ o}}$

$$\Rightarrow f(x,mx) = 8m^2x^2 - 6mx^3 + x^4 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^4 \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$$

non avremmo colto curve lungo le quali f tendesse a $-\infty$. Occorre scegliere una curva compresa fra le due parabole, cioè nella zona in cui $f(x,y) < 0$.

4) Si osservi che la curva è planare giacendo sul piano $z = 1$. Pertanto $\tau = 0$.

Inoltre la curva è un arco di ellisse, caratterizzato da $x > 0$:

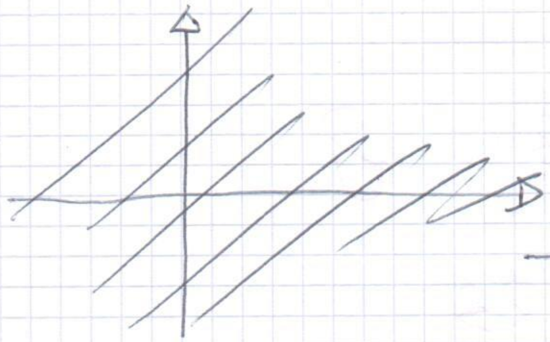
$$x = 2\sqrt{1-t^2} = 2\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 4(1-y^2) \end{cases}$$

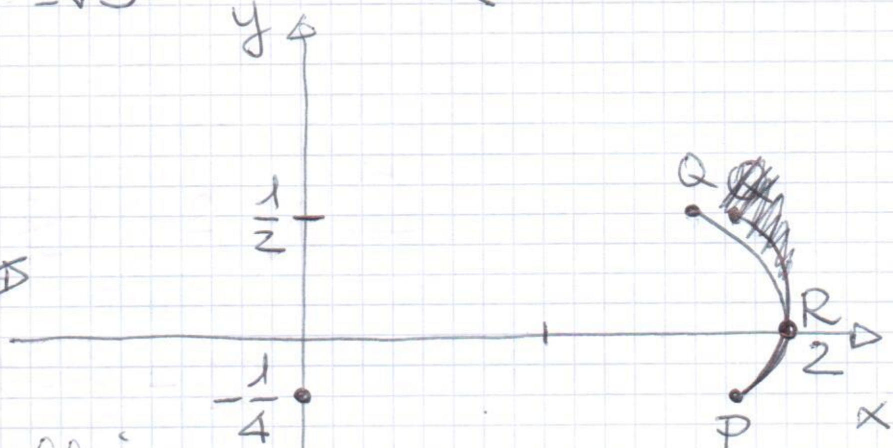
$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x > 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \left(\text{semiassi } \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right)$$

⑤

$$y = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2} \longleftarrow P$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \longleftarrow Q$$





Si ricordi che l'ellisse ha i vertici in $(\pm a, 0)$ (MAX. CURVATURA) e in $(0, \pm b)$ (MIN. CURVATURA).

Quindi, senza alcun conto, possiamo dedurre che in $R = (2, 0)$ $k_{\cancel{max}}$ ha un MAX. ASS.

In $P = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ k ha un MIN. REL.

In $Q = \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ k ha un MIN. ASS.

Svolgendo i conti:

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\|}{v^3(t)}$$

$$\vec{r}\,'(t): \begin{cases} x'(t) = -2t\,(1-t^2)^{-1/2} \\ y'(t) = 1 \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{4t^2}{(1-t^2)} + 1} = \sqrt{\frac{3t^2+1}{1-t^2}}$$

$$\vec{r}\,''(t): \begin{cases} x''(t) = -2\left[(1-t^2)^{-1/2} + t^2(1-t^2)^{-3/2}\right] \\ = -2\left[\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)^{3/2}}\right] = \frac{-2}{(1-t^2)^{3/2}} \\ y''(t) = z''(t) = 0 \end{cases}$$

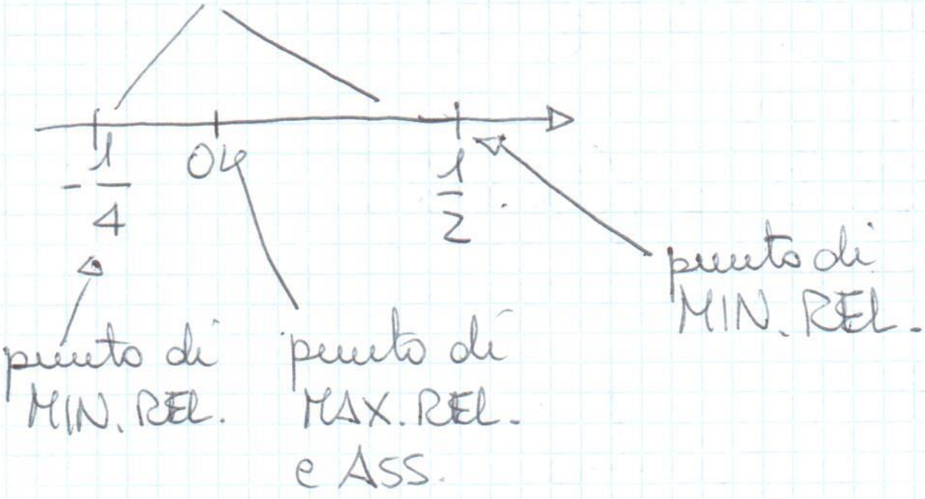
$$\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{-2t}{(1-t^2)^{1/2}} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{(1-t^2)^{3/2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{(1-t^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

$$k(t) = \frac{2}{(1-t^2)^{3/2}} \cdot \frac{(1-t^2)^{3/2}}{(3t^2+1)^{3/2}} = \frac{2}{(1+3t^2)^{3/2}}$$

$$k'(t) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)(1+3t^2)^{-5/2}\,6t = \frac{-18t}{(1+3t^2)^{5/2}}$$

$k'(t) > 0 \iff t < 0$

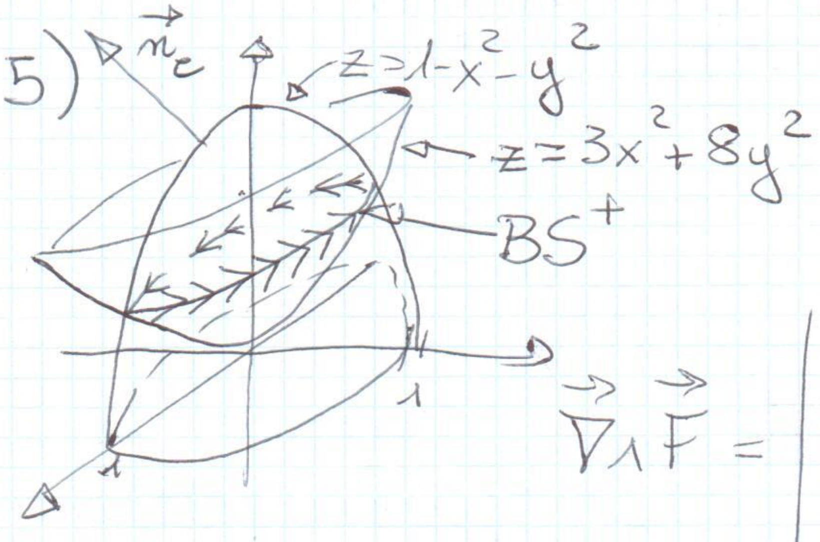


$\cancel{k\left(-\frac{1}{4}\right)=}$

$k(0) = 2$ MAX. ASS.

Per il calcolo del punto di MIN. ASS., senza far uso di conti, si osservi che, al crescere di $|t|$, la curvatura decresce, in quanto il denominatore cresce. Quindi, poichè $\left|\frac{1}{2}\right| > \left|-\frac{1}{4}\right|$, $\Rightarrow$ il MIN. ASS. viene assunto per $t = \frac{1}{2}$.

5)



Calcoliamo direttamente il flusso

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2 & 6x & y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} + 6\hat{k}$$

$\vec{n}_e = (L, M, N) = (-f_x, -f_y, 1)$

$= (2x, 2y, 1)$

$\Rightarrow (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n}_e = 2x + 6$

Poichè $\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq 3x^2 + 8y^2 \end{cases}$, si ha $1 - x^2 - y^2 \geq 3x^2 + 8y^2$

$\Rightarrow 4x^2 + 8y^2 \leq 1$. Pertanto la superficie può essere riscritta nella forma

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ 4x^2 + 8y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Phi_S(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = \iint_{D(x,y)} (2x + 6)\, dx\, dy =$$

coordinate ellittiche $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\rho\cos\vartheta \\ y = \frac{1}{3}\rho\sin\vartheta \end{cases}$ $J = \frac{1}{6}\rho$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$; $\rho \in [0, 1]$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6}\rho\, d\rho \int_0^{2\pi} [\rho\cos\vartheta + 6]\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 [\rho\sin\vartheta + 6\vartheta]_0^{2\pi} \rho\, d\rho = \frac{1}{6}\int_0^1 12\pi\rho\, d\rho$$

$= \pi$.

Se invece utilizziamo il Teorema del Rotore,

$$\Phi_S(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}) = \oint_{BS^+} \vec{F}\cdot\vec{ds}$$

$$BS: \begin{cases} 1-x^2-y^2 = 3x^2+8y^2 \\ z = 1-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2+9y^2 = 1 \\ z = 1-x^2-y^2 \end{cases}$$

Coordinate ellittiche: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\vartheta \\ y = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ $z = 1-\frac{1}{4}\cos^2\vartheta - \frac{1}{9}\operatorname{sen}^2\vartheta$

$$\Rightarrow \oint_{BS^+} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_0^{2\pi} \left[2\cdot\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\vartheta\right) + 3\cos\vartheta\,\frac{1}{3}\cos\vartheta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\vartheta\left[\frac{1}{2}\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta - \frac{2}{9}\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\right]\right]d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\operatorname{sen}\vartheta + \cos^2\vartheta + \frac{5}{54}\operatorname{sen}^2\vartheta\cos\vartheta\right]d\vartheta$$

$$= \cancel{\left[\cos\vartheta + \frac{5}{162}\operatorname{sen}^3\vartheta\right]_0^{2\pi}} + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos 2\vartheta + 1}{2}\right]d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\vartheta + \vartheta\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

6) Omogenea associata:

$$y'' - y' = 0 \quad \Rightarrow \alpha^2 - \alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2$$

Metodo di somiglianza: poiché $\alpha = 0$ è radice del polinomio caratteristico con $m_a = 1$

$$\Rightarrow y_p(x) = x(ax^2 + bx + c)$$

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y_p''(x) = 6ax + 2b$$

$$\Rightarrow 6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 3a = -1 \\ c = -1 + 2b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$

$$y'(x) = C_1 e^x - x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{cases} y(1) = C_1 e + C_2 - \frac{1}{3} - 1 - 3 = -1 \\ y'(1) = C_1 e - 1 - 2 - 3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 e = 7 \\ C_2 = \frac{10}{3} - C_1 e = \frac{10}{3} - 7 = \frac{-11}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 7e^{-1} \\ C_2 = \frac{-11}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = 7e^{x-1} - \frac{11}{3} - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$