SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 18/7/2024.

1) $x^2n^2 + \ln(n) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}$

$x^2n^2 + \ln(n) = 0$ solo per $n=1; x=0$.

Quindi $D_c = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si osservi che, se n fosse ≥ 2, D_c sarebbe $\mathbb{R}$.

In ogni caso, $\varphi_n(0) = \dfrac{n}{\ln n} \quad \forall n \geq 2$ e

$$\lim \varphi_n(0) = +\infty.$$

φ_n pari. $\varphi_n(x) > 0 \quad \forall x \in D_c$.

Convergenza puntuale: $\forall x \in D_c$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^2n^2 + \ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x^2n^2} = 0$$

$D_{cp} = D_c = \mathbb{R} - \{0\} \qquad \varphi(x) = 0$.

In $(0, +\infty)$,

$$\sup_{(0,+\infty)} |\varphi_n - \varphi| \geq \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+\ln n} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

NO CONV. UNIF. in $(0,+\infty)$ (e, per simmetria, in $(-\infty, 0)$).

Si osservi facilmente che, in $[\alpha, +\infty)$ $(\alpha > 0)$

$\varphi_n(x)$ è decrescente. Pertanto

$$\sup_{[\alpha,+\infty)} |\varphi_n - \varphi| = \max_{[\alpha,+\infty)} \varphi_n(x) = \varphi_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha^2 n^2 + \ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Quindi convergenza uniforme in ogni $[\alpha,+\infty)$ e in ogni $(-\infty,-\alpha]$, $\alpha>0$.

2

Si sarebbe potuto ottenere tale risultato anche tramite la derivata; in $[\alpha,+\infty)$

$$|\varphi_n - \varphi|' = \left(\frac{n}{x^2 n^2 + \ln n}\right)' = \frac{-n}{(x^2n^2+\ln n)^2} 2n^2 x < 0$$

$$\forall x \in [\alpha,+\infty).$$

Per quel che riguarda la serie associata, a termini positivi, basta osservare che $\forall x \in D_c$

$$\varphi_n(x) = \frac{n}{x^2 n^2 + \ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2 n}$$

e che la serie $\frac{1}{x^2}\sum \frac{1}{n}$ diverge. Pertanto

$\sum \varphi_n(x)$ diverge $\forall x \in D_c$.

2) $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| \leq \left|\frac{y \operatorname{arctg}|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \left|\frac{x \operatorname{arctg}|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$$\leq \frac{\cancel{|y|}\operatorname{arctg}|x|}{\cancel{|y|}} + \frac{\cancel{|x|}\operatorname{arctg}|y|}{\cancel{|x|}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Rightarrow$ f è CONTINUA in $(0,0)$.

$$f(0,y) = f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

DER. DIREZIONALI: (3)

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\beta t \operatorname{arctg}|\alpha t| + \alpha t \operatorname{arctg}|\beta t|}{t|t|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\beta \operatorname{arctg}|\alpha t| + \alpha \operatorname{arctg}|\beta t|}{|t|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\beta\left(|\alpha t| + o(|t|)\right) + \alpha\left(|\beta t| + o(|t|)\right)}{|t|}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(|\alpha|\beta + \alpha|\beta|\right)|t|}{|t|} = |\alpha|\beta + \alpha|\beta|$$

$$\cancel{\forall(\alpha,\beta)}\ \forall \vec{v} = (\alpha,\beta).$$

Si osservi che $\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = 0$ per $\alpha = 0$ $(f_y(0,0)=0)$

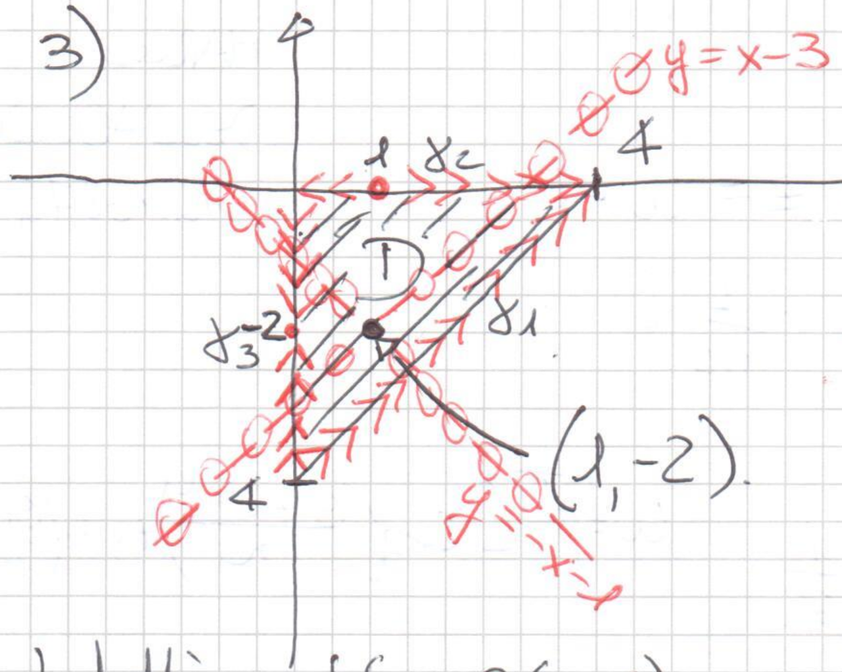
per $\beta = 0$ $(f_x(0,0) = 0)$

e per $\beta = -\alpha$, cioè lungo $y = -x$.

Infatti $f(x,-x) = 0$

Poiché non vale la formula del gradiente allora f NON è differenziabile in $(0,0)$.

3)



f è un PARABOLOIDE IPERBOLICO centrato in $(1,-2)$.

Pertanto già sappiamo che $(1,-2)$ è punto di sella.

Infatti:
$$\begin{cases} f_x = 2(x-1) \\ f_y = -2(y+2) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0} \iff (x,y) = (1,-2).$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,-2) \text{ è punto di sella.}$$

Si osservi che $f(x,y) = 0 \iff (x-1)^2 = (y+2)^2$

$$\iff y+2 = \pm(x-1) \Rightarrow y = x-3 \ \vee \ y = -x-1$$

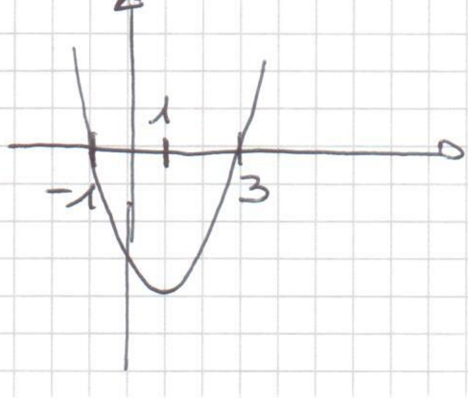
$$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x \in [0,4] \\ y = x-4 \end{cases} ; \quad \gamma_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x \in [0,4] \end{cases} ; \quad \gamma_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y \in [-4,0] \end{cases}$$

$$f\big|_{\gamma_1} = (x-1)^2 - (x-2)^2 = +2x-3$$ sempre crescente

$$f\big|_{\gamma_2} = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

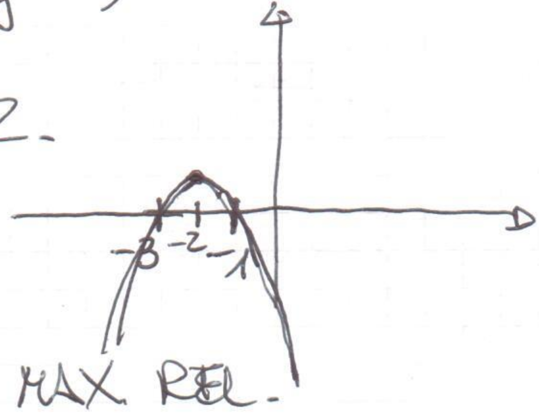
parabola con vertice in $x=1$



$$f(1,0) = -4$$

$f\big|_{\gamma_3} = -y^2-4y-3 = -(y+3)(y+1)$

parabola con vertice in $y=-2$.



$f(0,-2)=1$

Pertanto $P_1=(4,0)$ punto di MAX. REL.

$P_2=(1,0)$ punto di MIN. REL.

$P_3=(0,-2)$ punto di MAX. REL.

$P_4=(0,-4)$ punto di MIN. REL.

$f(0,-4)=-3 \quad ; \quad \underbrace{f(1,0)=-4}_{\text{MIN. ASS.}}$

$\underbrace{f(4,0)=5}_{\text{MAX. ASS.}} \quad ; \quad f(0,-2)=1$

4) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ con $\vec{F}_1 = (2xy, x^2, z)$ definito in $\mathbb{R}^3$

$\vec{F}_2 = \left(\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}, 0 \right)$ definito in $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,z)\}$

dunque $D = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z)\}$ NON è semplicemente connesso.

Per definizione di campo conservativo, deve esistere un potenziale definito in tutto D (e di classe C^1). È facile verificare che

$$U_1 = x^2y + 2z \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Pertanto
$$U(x,y,z) = U_1(x,y,z) + U_2(x,y,z)$$
$$= x^2y + 2z + \frac{1}{x^2+y^2} + C$$

definito in tutto D. Quindi $\vec{F}$ è conservativo.

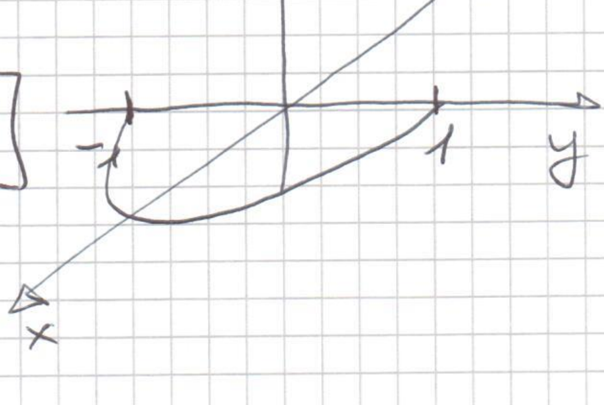
$\cancel{\Rightarrow \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} = 0}$ $\vec{P}(t=-1) = (0,-1,0)$

$\vec{P}(t=1) = (0,1,0)$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} = U(0,1,0) - U(0,-1,0) = 0.$$

In alternativa, si sarebbe potuto integrare $\vec{F}$ su una semicirconferenza di estremi $(0,-1,0)$ e $(0,1,0)$:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[(2\,\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta - 2\cos\vartheta)(-\mathrm{sen}\vartheta)$$

$$+(\cos^2\vartheta - 2\,\mathrm{sen}\vartheta)(\cos\vartheta)\Big]d\vartheta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[-2\,\mathrm{sen}^2\vartheta\cos\vartheta + \cos^3\vartheta\Big]d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-3\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \Big[\mathrm{sen}\vartheta - \mathrm{sen}^3\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

5) La formula per l'area delle superfici di rotazione attorno all'asse z è

$$\mathrm{Area}(S) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 |x(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \left[\begin{array}{l} u = 1+4t^2 \\ du = 8t\,dt \\ u(0)=1\,;\ u(1)=5 \end{array}\right.$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_1^5 \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{24}\,u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5$$

$$= \frac{\pi}{24}\Big[5^{3/2} - 1\Big].$$

6) Con l'abbassamento dell'ordine:

$$y''=z \quad \Rightarrow \quad z'-z=6x \quad ; \quad z(0)=y''(0)=1$$

$$\Rightarrow z(x)=e^{x}\left[C_1+\int 6xe^{-x}\,dx\right]$$

$$=e^{x}\left[C_1+6\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx\right]\right]$$

$$=e^{x}\left[C_1+6(-x-1)e^{-x}\right]$$

$$=C_1e^{x}-6x-6$$

$$z(0)=C_1-6=1 \quad \Rightarrow C_1=7$$

$$y''(x)=7e^{x}-6x-6 \quad \Rightarrow y'(x)=7e^{x}-3x^2-6x+C_2$$

$$y'(0)=7+C_2=0 \quad \Rightarrow C_2=-7$$

$$y(x)=7e^{x}-\cancel{6}x^3-3x^2-7x+C_3$$

$$y(0)=7+C_3=0 \quad \Rightarrow C_3=-7$$

$$\Rightarrow y(x)=7e^{x}-x^3-3x^2-7x-7.$$

In alternativa: $\cancel{y'''-y''}$ omogenea associata:

$$y'''-y''=0 \quad \Rightarrow \text{(eq. secolare)} \quad \alpha^3-\alpha^2=\alpha^2(\alpha-1)=0$$

$$\Rightarrow y_0(x)=C_1+C_2x+C_3e^{x}$$

Sol. particolare: metodo di somiglianza. $f(x)=6x$;

inoltre $\alpha=0$ è radice con $m_\alpha=2$

$$\Rightarrow y_P(x)=x^2(Ax+B)=Ax^3+Bx^2$$

$$y_P'(x)=3Ax^2+2Bx$$

$$y_P''(x)=6Ax+2B$$

$$y_P'''(x)=6A$$

$$\Rightarrow 6A-6Ax-2B=6x$$

$$\begin{cases} 6A=2B \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{NO}(x)=C_1+C_2x+C_3e^x-x^3-3x^2$$

$$y_{NO}(0)=C_1+C_3=0$$

$$y_{NO}'(x)=C_2+C_3e^x-3x^2-6x$$

$$y_{NO}'(0)=C_2+C_3=0$$

$$y_{NO}''(x)=C_3e^x-6x-6$$

$$y_{NO}''(0)=C_3-6=1 \Rightarrow \begin{cases} C_3=7 \\ C_2=-C_3=-7 \\ C_1=-C_3=-7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x)=7e^x-x^3-3x^2-7x-7.$$