SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 2 DEL 20/2/2025

1) Se $x=0 \Rightarrow \sum 0 = 0$

Se $x \neq 0$, riscriviamo la serie nella forma

$$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n$$ (serie geometrica di ragione e^{-x})

La serie è a termini positivi, quindi la convergenza semplice coincide con quella assoluta.

$$\sum q^n = \begin{cases} \text{converge se } |q|<1 \\ \text{diverge se } q \geq 1 \\ \text{è irregolare se } q \leq -1. \end{cases}$$

Somma: $S(x) = \dfrac{1}{1-q}$

$|e^{-x}| < 1 \iff e^{-x} < 1 \iff -x < 0$

$\iff x > 0$. In tal caso, $S(x) = \dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$

$$= \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}$$

Si osservi che $\lim_{x \to 0^+} S(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 e^x}{x} = 0$.

Dunque $S(x) \in C^0([0,+\infty))$.

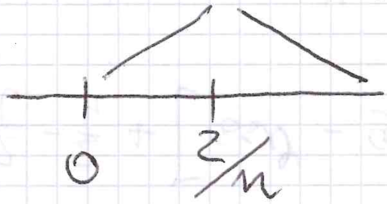
Abbiamo dunque $\Phi_{c.p.} = \Phi_{c.a.} = [0,+\infty)$.

CONVERGENZA TOTALE:

$$\sup_{[0,+\infty)} |f_n| = \sup_{[0,+\infty)} x^2 e^{-nx}$$

$$f_n'(x) = (2x - nx^2)e^{-nx} = -x(nx-2)e^{-nx} > 0$$

$$\iff x\left(x - \frac{2}{n}\right) < 0 \iff 0 < x < \frac{2}{n}$$



$$\sup_{[0,+\infty)} |f_n| = \max_{[0,+\infty)} f_n = f_n\left(\frac{2}{n}\right)$$

$= \frac{4}{n^2} e^{-2}$. Poichè $\sum |f_n| \approx \frac{4}{e^2} \sum \frac{1}{n^2}$ convergente

$$\Rightarrow \Phi_{c.s.} = \Phi_{c.a.} = \Phi_{c.t.} = [0,+\infty).$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{yx^2}{x^2+y^2}\right| \leq$$

(DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{yx^2}{2xy}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x}{2}\right| = 0.$$

~~PER~~ $f \in C^0((0,0))$.

DERIVATE PARZIALI: $f(x,0) = f(0,y) = 0$

$$\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

DER. DIR.: $$\lim_{t\to 0} \frac{t^3\alpha^2\beta}{t\,\mathrm{sen}(t^2)} = \alpha^2\beta$$

f è derivabile lungo ogni direzione.

Poichè le derivate direzionali non sono combinazione lineare delle derivate parziali, allora f NON è differenziabile.

Infatti:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k h^2}{\operatorname{sen}(h^2+k^2)\cdot\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k h^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^3}\cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\cancel{\rho^3}}$$

IL LIMITE DI $\frac{\Delta f - df}{\rho}$ $\nexists$.

3) Punti interni:

$$\begin{cases} f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+7}} + 2x = x\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+7}} + 2\right]}_{\neq 0} \\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+7}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \iff x = 0 \\ f_y = 0 \iff y = 0 \end{cases} \Rightarrow O \equiv (0,0) \text{ UNICO PUNTO INTERNO STAZIONARIO.}$$

Si osservi che $f(x,y) \geq \sqrt{7} - 1 = f(0,0)$

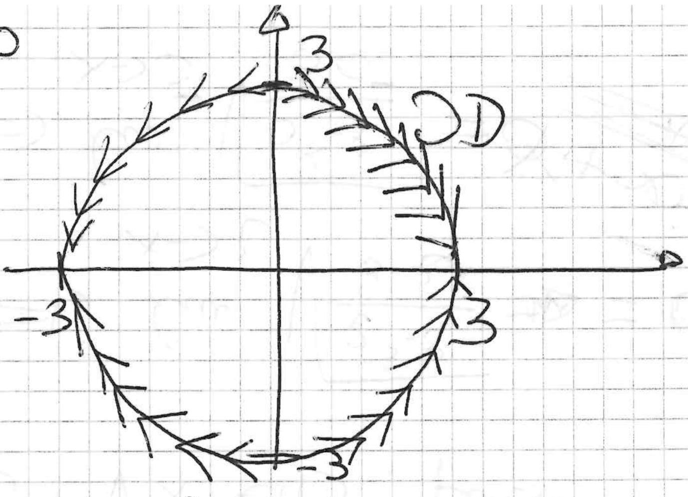
~~e che f_x~~ Quindi $(0,0)$ è punto di MIN. ASS.

Su ∂D: $\begin{cases} x = 3\cos\vartheta \\ y = 3\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$

$$f\Big|_{\partial D} = \sqrt{9+7} + 9\cos^2\vartheta - 1 = 3 + 9\cos^2\vartheta$$

$$\left(f\Big|_{\partial D}\right)' = 9\left[-2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\right] = -9\operatorname{sen}2\vartheta$$

Pertanto



$(0,3)$ e $(0,-3)$ PUNTI DI MINIMO VINCOLATO

$(3,0)$ e $(-3,0)$ PUNTI DI MASSIMO VINCOLATO

$f(0,\pm 3) = 4-1 = 3$ ~~MAX~~ MIN. RELATIVI

$f(\pm 3, 0) = 4+9-1 = 12$ MAX. RELATIVI

$f(0,0) = \sqrt{7}-1$ MIN. ASS.

4) $-|y|\sqrt{4-y^2} \leq |x| \leq |y|\sqrt{4-y^2}$

Ma $x \geq 0;\ y \geq 0 \Rightarrow$

$$D = \left\{0 \leq x \leq y\sqrt{4-y^2}\ ;\ y \geq 0\right\}$$

Si osservi che $4-y^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq y^2 \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow D = \left\{0 \leq x \leq y\sqrt{4-y^2}\ ;\ 0 \leq y \leq 2\right\}$$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_0^{y\sqrt{4-y^2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 dy \left[x^2\right]_0^{y\sqrt{4-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 y^2(4-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{y^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{[} \frac{1}{30}\left[y^3(20-3y^2)\right]_0^2 = \frac{8}{30}(8) = \frac{64}{30} = \frac{32}{15}$$

5) $$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\alpha(x^2+y^2) - 2y(x+\alpha y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\alpha x^2 - \alpha y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = y^2 - x^2 - 2xy$$

5

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \iff \alpha(x^2-y^2) - \cancel{2xy} = -(x^2-y^2) - \cancel{2xy}$$

$\vec{F}$ è irrotazionale $\iff \alpha = -1$

Poichè $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, non semplicemente linearmente connesso, l'irrotazionalità non implica automaticamente la conservatività. In realtà, integrando lungo la circonferenza $\mathcal{C} = \{x^2+y^2=r^2\}$, abbiamo

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)dy = \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}}\left[(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\cdot(-\sin\vartheta) + (\cos\vartheta+\sin\vartheta)(\cos\vartheta)\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cancel{-\sin\vartheta\cos\vartheta} + \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta + \cancel{\sin\vartheta\cos\vartheta})\,d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,d\vartheta = 2\pi \neq 0$$

Dunque in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ il campo non è conservativo.

Nell'aperto $A=\{(x,y) \mid y>0\}$ non abbiamo lacune. Pertanto il campo è conservativo in A. ⑥

$$U(x,y)=\int\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)dx=\int\frac{x}{x^2+y^2}\,dx-\int\frac{y}{y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\int\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{y^2}\right)}\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right)+\varphi'(y)$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}+\cancel{\frac{x}{x^2+y^2}}+\varphi'(y)=F_2=\cancel{\frac{x+y}{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow\varphi'(y)=0\;\Rightarrow\varphi(y)=C$$

$$\Rightarrow U(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)+C$$

in A.

6) Scriviamo l'equazione in forma normale:

$$y'=\frac{1+y^2}{2y}\cdot\frac{1}{x}$$

Equazione a variabili separabili, definita per $x\neq 0$; $y\neq 0$.

Poichè $(x_0, y_0) = (1,1)$, studiamo l'equazione in $(0, +\infty)$. ~~La funzione assum~~ le soluzioni assumano valori positivi.

7

Poichè $a(x) = \frac{1}{x} \in C^\infty((0,+\infty))$; $b(y) = \frac{1+y^2}{2y} \in C^\infty((0,+\infty))$ e poichè l'equazione è a variabili separabili, $\exists!$ sol $y^* \in C^1$ in un qualche intorno $I(1)$. La soluzione è pertanto LOCALE.

$b(y) \neq 0 \quad \forall y \Rightarrow$ NO soluzioni singolari.

Metodo di separazione delle variabili:

$$\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|1+y^2| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow (x>0) \qquad \ln(1+y^2) = \ln x + C$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \ln 2 = C$$

$$\Rightarrow \ln(1+y^2) = \ln(2x)$$

$$\Rightarrow 1+y^2 = 2x \Rightarrow y^2 = 2x-1 \geq 0$$

Ricordiamo che y deve essere > 0

$\Rightarrow y = \sqrt{2x-1}$. La soluzione è definita in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (soluzione locale).