SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA DI

ANALISI 2 - 22/7/2019 

1) Sappiamo che $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$ per $|t|<1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-(x^3)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} \quad \text{per } |x^3|<1$$

cioè per $x \in (-1,1)$

Quindi

- CONV. ASS. e PUNTUALE in $(-1,1)$
- CONV. UNIF. e TOTALE ad esempio in $[-\alpha,\alpha]$ ~~$\forall \alpha < 1$~~ $\forall \alpha \in (0,1)$

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 0 \,;\, x^2+y^2 \neq 1\}$

Detto $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$

$\Rightarrow D = \mathbb{R}^2 - D_1$.

La nuova funzione è dunque definita come

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x}{\log(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \in D_1 \end{cases}$$

che è definita in $D_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 1\}$.

Al di fuori di $(0,0)$, la funzione è composta di funzioni $C^\infty$ quindi continua, derivabile, differenziabile.

(2)

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\log(x^2+y^2) - \frac{2x^2}{x^2+y^2}}{\log^2(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \frac{-x}{\log^2(x^2+y^2)} \cdot \left[\frac{2y}{x^2+y^2}\right] = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)\log^2(x^2+y^2)}$$

In $(x,y)=(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tilde{f}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\log(x^2+y^2)} = \frac{0^\pm}{-\infty} = 0^\mp.$$

$\tilde{f}$ è CONTINUA in $D_2$.

$\tilde{f}(0,y)=0$ con $|y|<1$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{\log(h^2)}\right]\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\log(h^2)} = 0.$$

3

~~def.~~ $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{\tilde{f}(h,k)-\tilde{f}(0,0)-\tilde{f}_x(0,0)h-\tilde{f}_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{h}{\log(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \lim_{\rho\to 0} \left| \frac{\cancel{\rho}\cos\vartheta}{\log(\rho^2)\cdot\cancel{\rho}} \right|$

UNIFORMEMENTE rispetto a $\vartheta$

$\leq \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\log(\rho^2)} = 0 \quad \Rightarrow f$ diff.bile in $(0,0)$.

$\Rightarrow \frac{d\tilde{f}}{d\vec{v}}(0,0) = \alpha \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0) + \beta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0) = 0.$ $\forall \vec{v} = (\alpha,\beta)$

3) $\begin{cases} f_x = 2xy^2 + 2xy^2 e^{x^2y^2} = 2xy^2(1+e^{x^2y^2}) = 0 \\ f_y = 2yx^2(1+e^{x^2y^2}) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$ ~~$\cup \{ x^2y^2 = 0$~~

$\Rightarrow$ Tutti i punti $(x,0)$ e $(0,y)$ sono stazionari.

$f(x,0) = f(0,y) = 1$

Ma $f(x,y) \geq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ I PUNTI STAZIONARI SONO TUTTI DI MIN. ASSOLUTO.

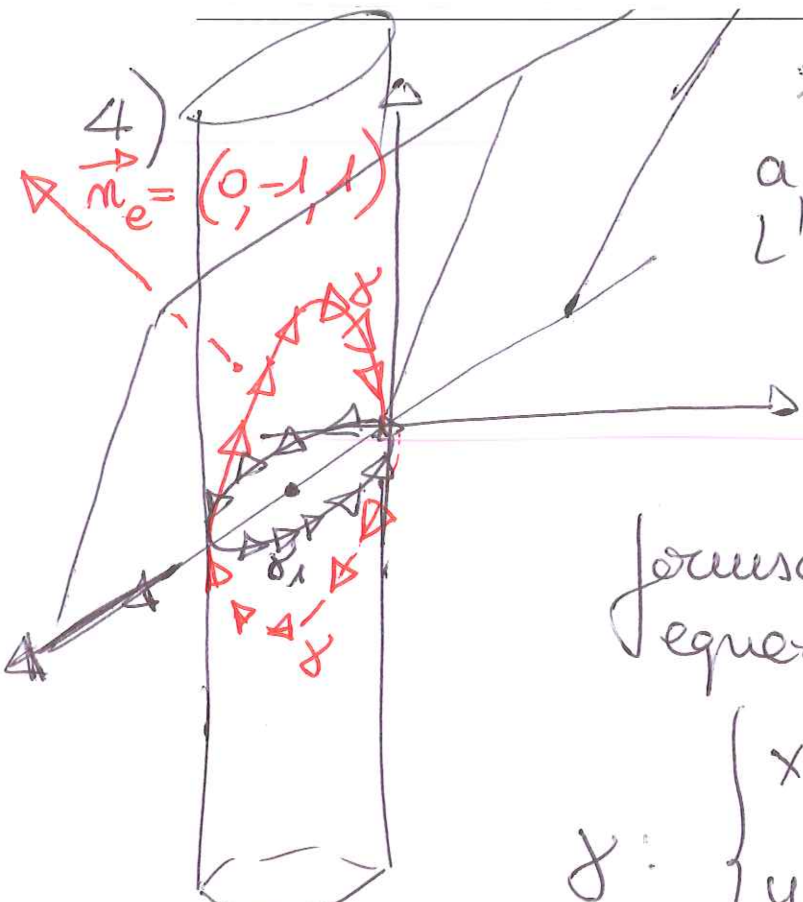
Poiché, ad esempio, lungo $y=x$

$$f(x,x) = x^4 + e^{x^4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$$

NON ESISTE MASSIMO ASSOLUTO.

---

4)




$x^2+y^2=2x$ corrisponde a $(x-1)^2+y^2=1$

L'intersezione fra il piano $z=y$ e il cilindro $(x-1)^2+y^2=1$ fornisce un'ellisse, di equazioni parametriche

$$\gamma: \begin{cases} x(\vartheta) = 1+\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sin\vartheta \\ z(\vartheta) = \sin\vartheta \end{cases} ; \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} = \int_0^{2\pi} \Big\{ \left[ (1+\cos\vartheta)^3 + \sin^2\vartheta \right] (-\sin\vartheta) + \cancel{\left[ (1+\cos\vartheta)\sin\vartheta + \sin^4\vartheta \right] (\cos\vartheta)} - \cancel{\left[ (1+\cos\vartheta)\sin\vartheta + \sin^4\vartheta \right] (\cos\vartheta)} \Big\} d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ (1+\cos\vartheta)^3 (-\sin\vartheta) + (1-\cos^2\vartheta)(-\sin\vartheta) \right] d\vartheta$$

$$= \left[ \frac{(1+\cos\vartheta)^4}{4} + \cos\vartheta - \frac{\cos^3\vartheta}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Il campo, comunque, non è conservativo, perché non è irrotazionale:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = z\,\vec{j} + (-y)\,\vec{k}$$

La curva $\gamma$ è bordo di infinite superfici. (5b)

La più semplice è la superficie ellittica, appartenente al piano $z=y$, di cui $\gamma$ è frontiera.

La normale esterna al piano è $\vec{n}_e = \pm(0,1,-1)$.

Poiché, quando la circonferenza $\gamma_1$ viene percorsa in senso antiorario, la curva $\gamma$ viene percorsa nel verso indicato nel

disegno, la faccia che viene lasciata alla sinistra di $\gamma$ è quella relativa a $\vec{n}_e = (0,-1,1)$.

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n}_e = -z-y.$$

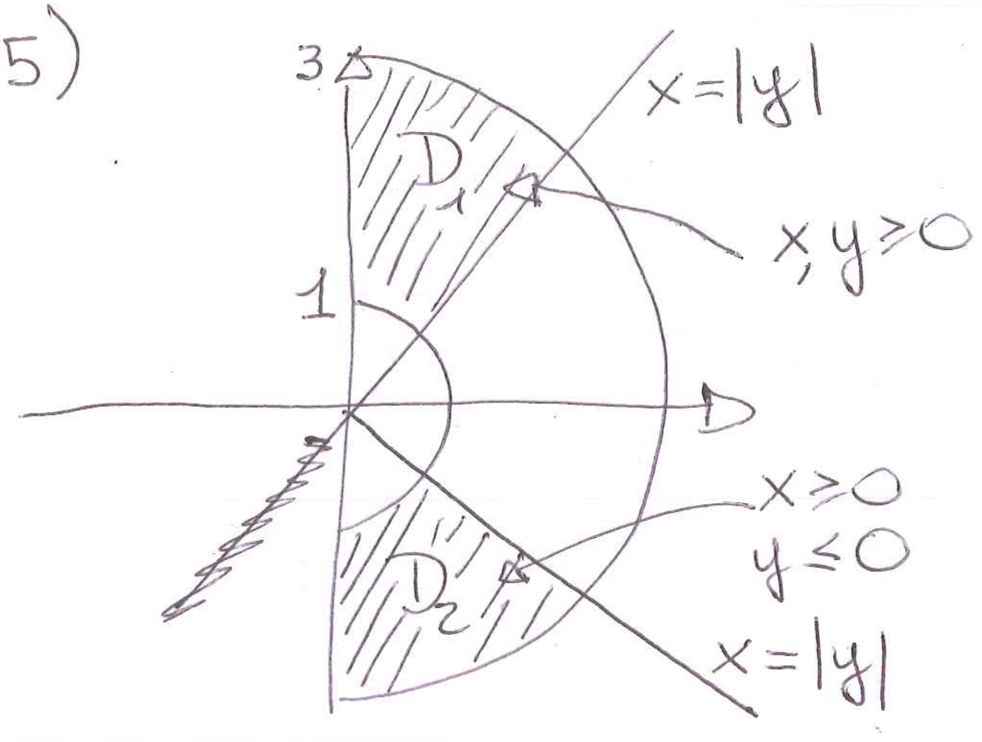
S è un piano, grafico di funzione di $(x,y)$

$$\Rightarrow \Phi_S(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = \iint_S (-z-y)\, dx\,dy$$

Ma S: $\begin{cases} x = 1+\rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = \rho\sin\vartheta \end{cases}$ $\quad \rho \in [0,1]$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho\left[-2\rho\sin\vartheta\right] d\rho = -\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 2\rho^2\, d\rho$$

$$= \left[\cos\vartheta\right]_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}\rho^3\right]_0^1 = 0.$$

5) 


⑥

Il dominio è simmetrico rispetto all'asse x. Inoltre

$f(x,-y) = f(x,y)$. Pertanto

$$\iint_D \left|\frac{x}{y}\right| dx\,dy = 2\iint_{D_1} \left|\frac{x}{y}\right| dx\,dy = 2\iint_{D_1} \frac{x}{y}\, dx\,dy$$

In coordinate polari:

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_1^3 \rho \left[\frac{\cancel{\rho}\cos\vartheta}{\cancel{\rho}\sin\vartheta}\right] d\rho$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}\vartheta\, d\vartheta \cdot \int_1^3 \rho\, d\rho = \cancel{2}\Big[\ln|\sin\vartheta|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}}\right]_1^3$$

$$= \ln\left[\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right] \cdot (9-1) = 8\ln\sqrt{2}$$

$$= 4\ln 2.$$