

SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 22/9/2025.

①

1) $\varphi_n(x)$ è definita per $1 + \frac{x}{\sqrt{n}} > 0$,
cioè per $x > -\sqrt{n}$. Pertanto
 $D_c = (-1, +\infty)$.

$$\forall x \in D_c \quad 1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{n}}$$

pertanto $\sum \varphi_n(x) \approx \sum \frac{x}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}$

Se $x \in (-1, 0)$, serie di segno negativo.

Se $x \in (0, +\infty)$, " " " positivo.

~~Segue che~~ Se $x=0$, la serie tende a 0.
Pertanto, a parte il caso $x=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sum \varphi_n(x)$ converge semplicemente e
assolutamente per $\alpha + \frac{1}{2} > 1$,
cioè $\forall x > \frac{1}{2}$

La convergenza assoluta è garantita in ogni
compatto contenuto nell'insieme di definizione.

2) in coordinate polari:

(2)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (\sin \vartheta \rho - 1)}{\rho} \right|$$

$$\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\rho^2 \sin 2\vartheta \sin \vartheta}{2} \right| + \left| \rho \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right|$$

$$\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 + \rho}{2} = 0$$

UNIF. rispetto
a ϑ .

f CONTINUA in $(0,0)$.

$$f(0,y) = f(x,0) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

DER. DIR.:

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t^{\alpha\beta} (t^\beta - 1)}{|t|t} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t}{|t|} \alpha\beta (t^{\beta-1})$$

$$= \alpha\beta \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t}{|t|} = \begin{cases} \neq & \text{se } \alpha, \beta \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \text{ oppure } \beta = 0 \end{cases}$$

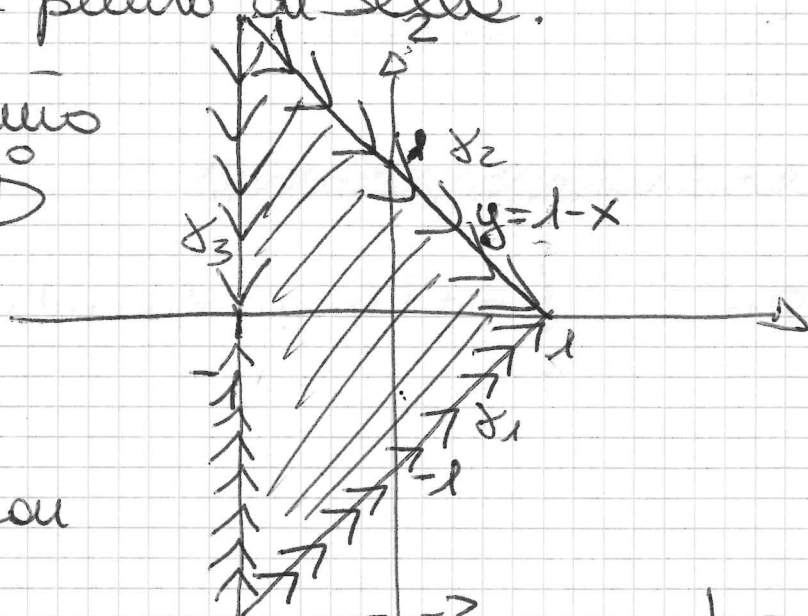
(derivate parziali)

$\Rightarrow$ NON è differenziabile in $(0,0)$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$, ma non è $\dot{C}^1$ nell'origine,
poiché non è differenziabile.

3) la funzione è un paraboloide iperbolico, 3
che ha in $(0,0)$ un punto di sella.

Poiché D è il dominio
in figura, $(0,0) \in D$
~~ed~~ ed è punto di
sella per f in D .



$\partial D = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3$, con

$$\delta_1 = \begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y = -1 + x \end{cases}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\delta_3 = \begin{cases} x = -1 \\ y \in [-2, 2] \end{cases}$$

$$f|_{\delta_1} = x^2 - (x-1)^2 = (2x-1) \text{ crescente in } [-1, 1]$$

$$f|_{\delta_2} = x^2 - (1-x)^2 = 2x-1 \text{ crescente in } [-1, 1]$$

$$f|_{\delta_3} = 1 - y^2 \text{ parabola rivolta verso il basso}$$

Si osserva che $f(x, -y) = f(x, y)$, dunque la
funzione è simmetrica rispetto all'asse x

$$f(-1, -2) = f(-1, 2) = -3 \text{ punti di MIN. ASS.}$$

$f(-x, y) = f(x, y)$, dunque la funzione è
simmetrica rispetto all'asse y .

$$f(-1, 0) = f(1, 0) = 1 \text{ punti di MAX. ASS.}$$

4) Il campo è il classico esempio di campo vorticoso, ma non conservativo. È noto dalla teoria che, muovendosi lungo una curva chiusa in senso orario attorno all'origine $(0,0)$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = -2\pi$$

④

e muovendosi in senso antiorario

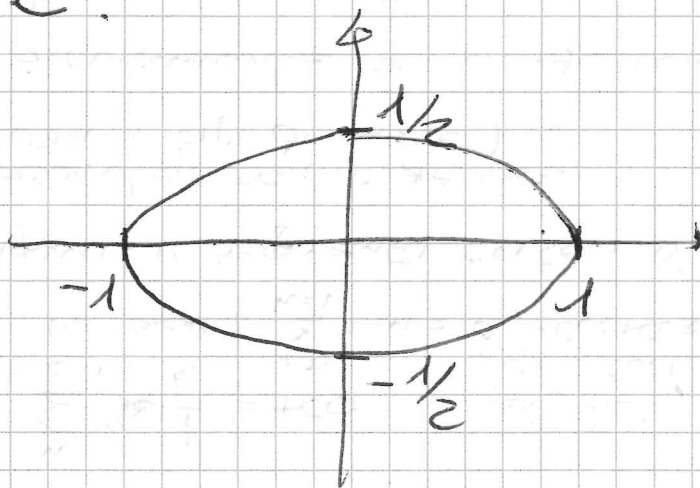
$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi$$

la curva è un'ellisse $\mathcal{E}$:

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

Pertanto

$$\left| \oint_{\mathcal{E}} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right| = 2\pi.$$



$$5) \begin{cases} x'(t) = 1 > 0 \quad \forall t \\ y'(t) = 2t \\ z'(t) = 3t^2 \end{cases}$$

~~$\Rightarrow \gamma(t)$~~ $\Rightarrow \gamma$ è regolare.

la curva non è piana perché non esistono relazioni lineari tra le componenti. In ogni

caso:

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 2 \\ z''(t) = 6t \end{cases}$$

$$; \begin{cases} x'''(t) = 0 \\ y'''(t) = 0 \\ z'''(t) = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\vec{r}' \wedge \vec{r}'') \cdot \vec{r}''' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow r = 0.$$

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{v^3(t)}$$

$$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = \hat{i} 6t^2 - \hat{j} 6t + 2\hat{k}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^3} = 2 \frac{\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^3}$$

~~Per~~ Poiché $t \geq 0$, possiamo sostituire $u = t^2$

$$k(u) = 2 \frac{\sqrt{9u^2 + 9u + 1}}{(9u^2 + 4u + 1)^3}$$

$$\frac{dk}{du} = 2 \underbrace{\left[\frac{1}{2\sqrt{\quad}} \right]}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\frac{9u^2 + 9u + 1}{(9u^2 + 4u + 1)^3} \right)'}_{\text{STUDIARE QUESTA}}$$

$$\left(\frac{9u^2 + 9u + 1}{(9u^2 + 4u + 1)^3} \right)' =$$

$$= (18u+9)(9u^2+4u+1) - (9u^2+9u+1).$$

⑥

$$\frac{3(9u^2+4u+1)^2(18u+4)}{(9u^2+4u+1)^4}$$

$$= \frac{3}{(9u^2+4u+1)^4} \left[(6u+3)(9u^2+4u+1) - (18u+4)(9u^2+9u+1) \right]$$

$$= \frac{3}{(9u^2+4u+1)^4} \left[\begin{array}{l} 54u^3 + 24u^2 + 6u + 3 \\ + 27u^2 + 12u \\ - 162u^3 - 162u^2 - 18u \\ - 36u^2 - 36u - 4 \end{array} \right]$$

$$= \frac{3}{(\quad)^4} \left[-108u^3 - 144u^2 - 36u - 1 \right] < 0$$

0

Donc $k(u)$ est décroissante

$$\max_{[0, +\infty)}(k) = k(0) = 2.$$

6) $y' = -2x\sqrt{y}$ a variabili separabili. $\neq$
 $x \in \mathbb{R}; y \geq 0$

$$a(x) = -2x \in C^\infty(\mathbb{R}) \ni x_0 = 1$$

$$b(y) = \sqrt{y} \in C^\infty(0, +\infty) \ni y_0 = 1$$

$\Rightarrow \exists U(x_0)$ t.c. $\exists!$ sol $y(x) \in C^1(U(x_0))$.
 quindi SOL. LOCALE.

$y(x) \equiv 0$ sol. singolare, ma non soddisfa il
 problema di Cauchy.

Ponendo $y(x) > 0$:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int -2x dx$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = -x^2 + C$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow 2 = -1 + C \Rightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = 3 - x^2 > 0 \Rightarrow \underline{-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{y} = \frac{3-x^2}{2} \Rightarrow y = \underline{\frac{(3-x^2)^2}{4}}$$

la soluzione è definita solo su $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.