SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2
26/1/2024

1

1) Poichè $x \geq 0$, $\varphi_n(x) \geq 0$, quindi studiare la convergenza semplice coincide con lo studio della convergenza assoluta.

$\underline{x=0}$: $\varphi_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1 \implies \sum \varphi_n(0) = 0$

$\underline{0 < x \leq 1}$ $\qquad \dfrac{nx}{x^n + n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{nx}{n^2} = \dfrac{x}{n}$

$\sum \dfrac{x}{n}$ diverge $\implies \sum \varphi_n(x)$ diverge

$\underline{x > 1}$: $\qquad \dfrac{nx}{x^n + n^2} \sim \dfrac{n}{x^{n-1}} = \dfrac{nx}{x^n}$

Possiamo studiare la serie col criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\varphi_n(x)} = \frac{\sqrt[n]{nx}}{x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{x} < 1 \iff x > 1$$

Quindi $\Phi_{c.punt} = \{0\} \cup \{x > 1\} = \Phi_{c.ass}$.

Si osservi anche che, ponendo $t = \frac{1}{x}$, abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (t^n)'$$

che converge per $|t| < 1$, quindi per $x > 1$.

CONVERGENZA TOTALE:

$$\sup_{(1,+\infty)} |\varphi_n| = \sup_{(1,+\infty)} \varphi_n \geq \varphi_n(1) = \frac{n}{1+n^2}$$

$$\Rightarrow \sum \sup |\varphi_n| \geq \sum \frac{n}{n^2+1} \approx \sum \frac{1}{n} \text{ divergente}$$

Quindi in $(1,+\infty)$ non c'è convergenza totale, come era lecito aspettarsi, visto che in $x=1$ la serie diverge.

Verifichiamo in $[h,+\infty)$, con $h>1$.

$$\sup_{[h,+\infty)} \varphi_n \leq \sup_{[h,+\infty)} \frac{nx}{x^n} = \sup_{[h,+\infty)} \underbrace{n x^{1-n}}_{\text{decrescente}} = n h^{1-n}$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nh}{h^n}$ converge, applicando ad esempio il criterio della radice, come prima.

Quindi ~~conver~~ $\Phi_{c.tot} = [h,+\infty) \quad \forall h>1$.

2) <u>CONTINUITÀ</u>:

$$\left|\frac{e^x x y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{e^x |x||y^2|}{2|x||y|} = \frac{1}{2} e^x |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Rightarrow f$ CONTINUA in $(0,0)$.

In alternativa, in coordinate polari:

$$|f(x,y)| = \frac{e^{\rho\cos\vartheta} \rho^3 |\cos\vartheta| \sin^2\vartheta}{\rho^2} \leq e^\rho \rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

UNIF. rispetto a ϑ.

$f(0,y) = f(x,0) = 0$

$\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

DER. DIREZIONALI:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{t\alpha}\, \cancel{t^3}\, \alpha\beta^2}{\cancel{t^3}} = \alpha\beta^2 = \frac{df}{d\vec{v}}(0,0)$$

$$\forall \vec{v} = (\alpha, \beta)$$

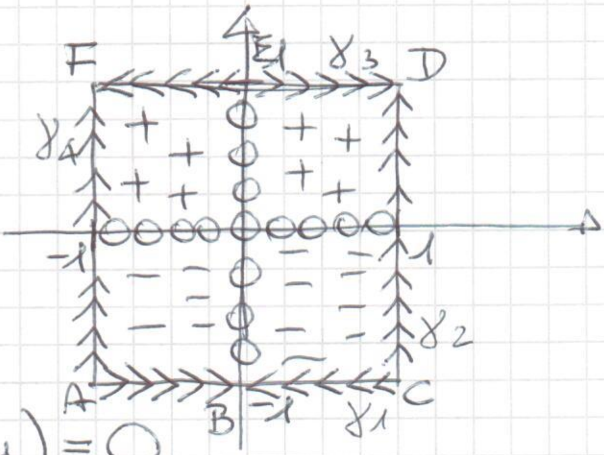
Poichè le derivate direzionali NON sono combinazioni lineari di α e β $\Rightarrow$ NON vale la formula del gradiente $\Rightarrow$ f NON differenziabile in $(0,0)$.

Infatti: $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e^{h}\, hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{\rho\cos\vartheta}\, \cancel{\rho^3} \cos\vartheta \sin^2\vartheta}{\cancel{\rho^3}}$$

$$= \cos\vartheta \sin^2\vartheta$$ DIPENDENTE DA ϑ

$\Rightarrow$ NON DIFFERENZIABILE in $(0,0)$.

3) In $\mathring{Q}$:



$f_x = 2xy\, e^{yx^2}$

$f_y = e^{yx^2} \cdot x^2$

$f_y = 0 \iff x = 0 \Rightarrow f_x(0,y) = 0$

Quindi tutti i punti $(0,y)$ sono STAZIONARI.

$f(0,y) = 0$

L'Hessiano non darebbe informazioni. Invece

$$\Delta f = f(x,y) - f(0,y) = e^{yx^2} - 1 > 0$$

$$\iff yx^2 > 0 \iff y > 0$$

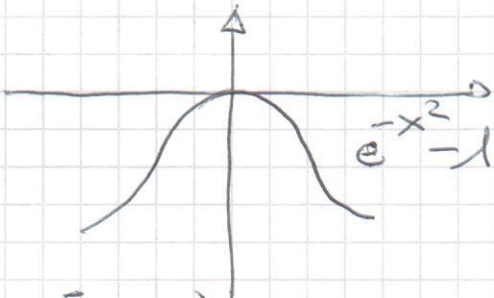
Pertanto i punti $(0,y)$, con $y<0$, sono di MAX. REL. I punti $(0,y)$, con $y>0$, sono di MIN. REL. Il punto $(0,0)$ è di sella.

Sulla frontiera: $\partial Q = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x \in [-1,1] \\ y = -1 \end{cases} ; \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y \in [-1,1] \end{cases} ; \quad \gamma_3 : \begin{cases} x \in [-1,1] \\ y = 1 \end{cases} ;$$

$$\gamma_4 : \begin{cases} x = -1 \\ y \in [-1,1] \end{cases}$$

$$f\Big|_{\gamma_1} \overset{f(x,-1)}{=} e^{-x^2} - 1 \leq 0 \quad \forall x \in [-1,1]$$



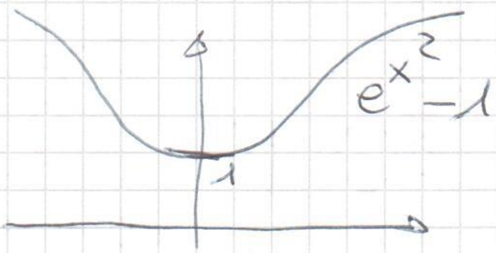
$$\left(f\Big|_{\gamma_1}\right)' = -2x\,e^{-x^2}.$$ f crescente in $[-1,0)$ e decrescente in $(0,1]$.

$B=(0,-1)$ punto di MAX. REL.

$f(0,-1) = 0$ (si ricordi che $f(0,y)=0$ $\forall y$)

$$\left(f\Big|_{\gamma_2}\right) = \left(f\Big|_{\gamma_4}\right) = e^{y} - 1$$ crescente in $[-1,1]$

$$\left(f\Big|_{\gamma_3}\right) = f(x,1) = e^{x^2} - 1$$



$\left(f|_{\gamma_3}\right)' = 2x e^{x^2}$ decrescente in $[-1,0)$, crescente in $(0,1]$. $E=(0,1)$ PUNTO DI MIN. REL.

(5)

$f(0,1)=0$.

Dal grafico di pag. (3) si osserva che

~~A, C, E punti di MIN. REL.~~

$A, C, (0,y)$, con $0<y\leq 1$ punti di MIN. REL.

$$\left.\begin{array}{l} f(A) = f(-1,-1) = e^{-1}-1<0 \\ f(C) = f(1,-1) = e^{-1}-1<0 \end{array}\right\} \text{MINIMO ASSOLUTO}$$

$f(0,y)=0$

Si osservi che f è simmetrica rispetto all'asse y: $f(-x,y)=f(x,y)$.

$F, D, (0,y)$, con $-1\leq y<0$ punti di MAX. REL.

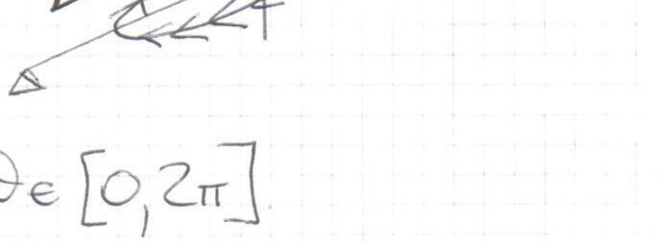
$f(F) = f(-1,1) = f(D) = f(1,1) = e-1>0$

$f(0,y)=0$

MAX. ASS.

4)

$$\Phi_S(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = \oint_{BS^+} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$



$$BS: \begin{cases} x=\cos\vartheta \\ y=\sin\vartheta \\ z=\cos^4\vartheta+\sin^2\vartheta \end{cases}$$

$\vartheta\in[0,2\pi]$

Se la faccia esterna è quella rivolta verso il basso, allora BS va percorso in senso antiorario. ⑥

$$\Rightarrow \Phi_S(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{F}}) = -\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos\vartheta(-\sin\vartheta) + \\ \cos\vartheta\cdot\cos\vartheta + \\ \cos\vartheta(4\cos^3\vartheta(-\sin\vartheta) \\ +2\sin\vartheta\cos\vartheta) \end{bmatrix} d\vartheta$$

$$= \underbrace{-\int_0^{2\pi}\left[\cos\vartheta + 4\cos^4\vartheta - 2\cos\vartheta\right](-\sin\vartheta)\,d\vartheta}_{=0} - \int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta$$

per periodicità del coseno

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos 2\vartheta + 1\right]d\vartheta$$

$$= -\pi \Rightarrow |\Phi_S| = \pi$$

Calcolando il flusso direttamente, si ottiene

$$S: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^4 + v^2 \end{cases} \qquad u^2+v^2 \le 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,\vec{F}} = -\hat{j} + \hat{k} = (0,-1,1).$$

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4u^3 \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$$

$\vec{n}_e = (L, M, N) = \pm(-4u^3, -2v, 1)$

Poiché abbiamo scelto $\vec{n}_e$ rivolto verso il basso.

$\Rightarrow \vec{n}_e = (4u^3, 2v, -1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}\,F} \cdot \vec{n}_e = -2v - 1$

$$\Rightarrow \Phi_S(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,F}) = -\iint_{u^2+v^2\le 1} (2v+1)\,du\,dv$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho(2\rho \sin\vartheta + 1)\,d\rho =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\vartheta \left[\frac{2}{3}\rho^3 \sin\vartheta + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\sin\vartheta + \frac{1}{2}\right) d\vartheta$$

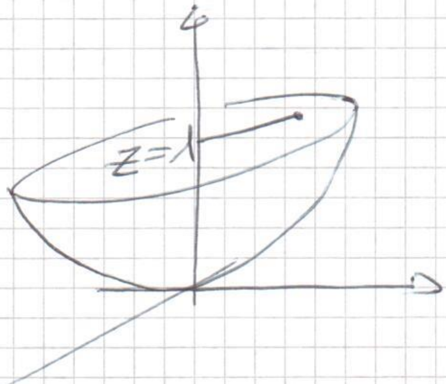
$$= \frac{2}{3}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\vartheta \Big|_0^{2\pi} = -\pi. \quad \Rightarrow |\Phi_S| = \pi.$$

Si osservi che, chiedendo il modulo del flusso, non si pone il problema del verso della

in realtà

normale esterna, nè del verso di percorrenza di BS.

5)



$$I = \iiint_D \mathrm{dist}(P, \text{asse } z)^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{(x^2+y^2\le 1)} (x^2+y^2)\,dx\,dy \left[1-(x^2+y^2)^3\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \left[\rho^3 - \rho^9\right] d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^{10}}{10}\right]_0^1 =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] = \frac{3\pi}{10}.$$

6) $a(x) = x+1 \in C^\infty(\mathbb{R})$

$b(y) \in C^1([0,+\infty)) \qquad \left(b'(y) = \frac{3}{2}\sqrt{y}\right)$

$\Rightarrow \exists!$ sol $y \in C^1$ locale (l'equazione è a variabili separabili). $\quad y(x) \geq 0$

Sol. singolare: $y = 0$ non soddisfa il problema di Cauchy.

Metodo di separazione delle variabili ($y \neq 0$):

$$\int dy\, y^{-\frac{3}{2}} = \int (x+1)\,dx$$

$$-2y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$y(1) = 4 \Rightarrow -1 = \frac{3}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}(x^2+2x-5)$$

Questa soluzione impone che

$$x^2 + 2x - 5 < 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x \in (-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}).$$

$$y(x)=\frac{16}{(x^2+2x-5)^2}$$

Si osservi, infatti, come verifica, che

$$y'(x)=\frac{-32}{(x^2+2x-5)^3}(2x+2)=\frac{-64(x+1)}{(x^2+2x-5)^3};$$

$$(x+1)\sqrt{y^3}=\frac{(x+1)\cdot\sqrt{4^6}}{\sqrt{(x^2+2x-5)^6}}=\frac{4^3(x+1)}{|x^2+2x-5|^3}$$

$$=\frac{64(x+1)}{-(x^2+2x-5)^3}$$

in virtù proprio del fatto che $x^2+2x-5<0$.

da cui $y'=(x+1)\sqrt{y^3}$.