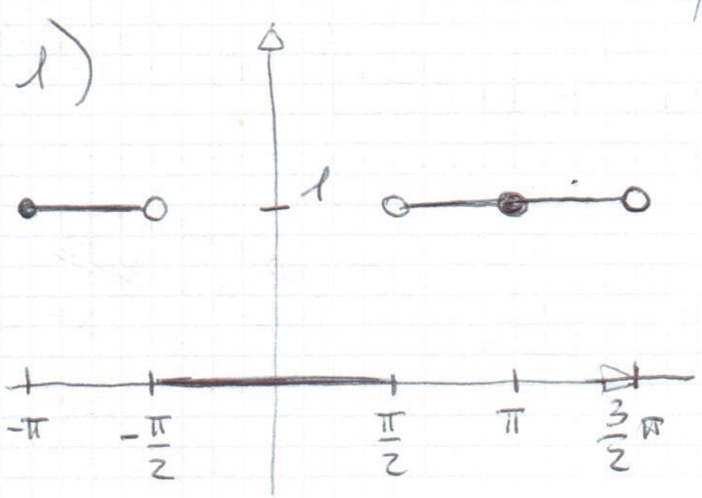
SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 2
del 29/1/2020

1)



FUNZIONE PARI

$$\Rightarrow \quad b_k = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = 1$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi k}\operatorname{sen} kx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{-2}{\pi k}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi k}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(kx)$$

Ma

$$\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m & \text{se } k = 2m+1 \\ 0 & \text{se } k = 2m \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2m+1)}(-1)^m \cos\left[(2m+1)x\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\,2}{\pi(2m+1)} \cos\left[(2m+1)x\right]$$

Poichè $f(-\pi) = f(\pi) = 1$, allora la somma della serie è

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 0 & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (*) di p. 2

Per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2,$$

facciamo uso dell'eguaglianza di Parseval:

$$\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum\left(a_k^2+\underset{0}{\underset{\parallel}{\cancel{b_k^2}}}\right)\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \cancel{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum a_k^2\right]=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\,dx=\frac{1}{\cancel{\pi}}$$

da cui $\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2=\frac{1}{2}}$ a prescindere dal valore esplicito dei coefficienti a_k.

Si osserva che comunque

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2=\sum_{m=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^{m+1}2}{\pi(2m+1)}\right]^2=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2(2m+1)^2}$$

Pertanto, dalla diseguaglianza di Parseval si ottiene la somma di una serie notevole:

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

(*)

CONVERGENZA PUNTUALE in $\mathbb{R}$

CONVERGENZA UNIFORME IN OGNI INTERVALLO DEL TIPO

$[\alpha,\beta]$ con $2k\pi-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $[\gamma,\delta]$ con $-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi<\gamma<\delta<\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$

2) Insieme di definizione:

$\frac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$ è definita in $D_1 = \mathbb{R}^2 - \{y=-x\}$.

Pertanto l'insieme di definizione è

$$D = D_1 \cup \{(0,0)\}.$$

Continuità: f è certamente continua in D_1.

Verifichiamo la continuità in $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^4-y^4}{x^3+y^3} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{(x^2+y^2)\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)} \right|$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \left| \frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos\vartheta - \sin\vartheta)}{\cancel{\rho^2}(1-\cos\vartheta\sin\vartheta)} \right| \leq \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho(|\cos\vartheta|+|\sin\vartheta|)}{(1/2)}$$

$$\leq 4 \lim_{\rho\to 0} \rho = 0 \quad \Rightarrow f \text{ CONTINUA in } (0,0)$$

$\Rightarrow f \in C^0(D)$.

N.B.: $1-\cos\vartheta\sin\vartheta = 1 - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \geq \frac{1}{2}$

Derivabilità: f è derivabile $\forall (x,y) \in D_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3(x^3+y^3) - (x^4-y^4)3x^2}{(x^3+y^3)^2} = \frac{x^2(x^4+4xy^3+3y^4)}{(x^3+y^3)^2}$$

e, per analogia,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y^2(y^4+4yx^3+3x^4)}{(x^3+y^3)^2}$$

In $(0,0)$ abbiamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h\cdot h^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{-k^4}{k^4} = -1$$

$\Rightarrow f$ è derivabile parzialmente in D.

<u>Differenziabilità</u>: poiché $f \in C^\infty(D_1)$

$\Rightarrow f$ è differenziabile in D_1.

In $(0,0)$: poiché

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^4}(\alpha^4-\beta^4)}{\cancel{t^4}(\alpha^3+\beta^3)} = \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^3+\beta^3}$$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2} = \frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\beta} \neq \underbrace{\alpha f_x + \beta f_y}_{=\alpha-\beta}$$

$\Rightarrow$ non vale la formula del gradiente, quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

Oppure:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^4-k^4}{h^3+k^3} - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{h^4} - \cancel{k^4} - \cancel{h^4} - hk^3 + kh^3 + \cancel{k^4}}{(h^3+k^3)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^4}}{\cancel{\rho^4}} \left[\frac{\sin^3\vartheta\cos\vartheta - \cos^3\vartheta\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta}\right]$$

<u>CHE NON ESISTE</u>

$\Rightarrow f$ NON differenziabile in $(0,0)$.

Quindi f è differenziabile solo in D_1.

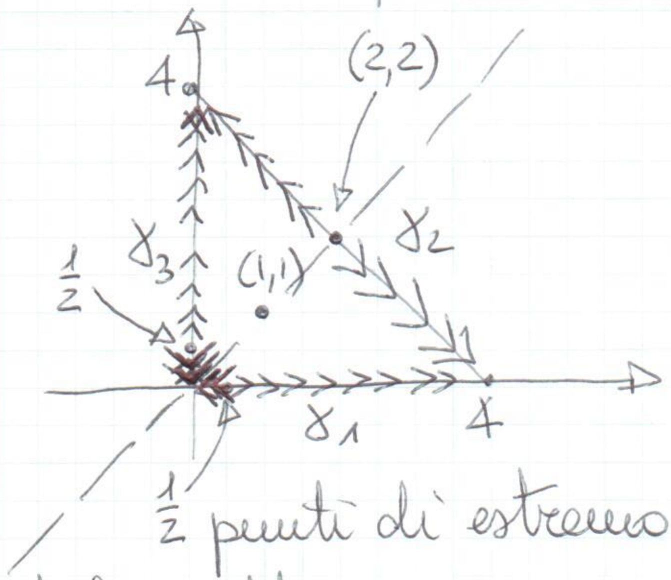
Si sarebbe potuto arrivare agli stessi risultati osservando che f è 1-omogenea, quindi CONTINUA in $(0,0)$, ma NON differenziabile in $(0,0)$.

3) Estremi liberi: $\begin{cases} f_x = 2x - y - 1 = 0 \\ f_y = 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 4x - 2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

~~f è dotata~~ $f_{xx} = 2$; $f_{xy} = f_{yx} = -1$; $f_{yy} = 2$

$\Rightarrow H(0,0) = \begin{vmatrix} (2)^{>0} & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ $\Rightarrow$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO



f è SIMMETRICA rispetto alla retta $y = x$:

$f(x,y) = f(y,x)$,

quindi dovremo aspettarci punti di estremo simmetrici rispetto a tale retta.

$\partial E = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x \in [0,4] \\ y = 0 \end{cases} ; \quad \gamma_2 : \begin{cases} x \in [0,4] \\ y = 4 - x \end{cases} ; \quad \gamma_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y \in [0,4] \end{cases} .$$

$f|_{\gamma_1} = x^2 - x$

DECRESCE in $[0, \frac{1}{2})$;
CRESCE in $(\frac{1}{2}, 4]$

$f|_{\gamma_3} = y^2 - y$

DECRESCE in $[0, \frac{1}{2})$
CRESCE in $(\frac{1}{2}, 4]$

$$f|_{\gamma_2} = x^2 + (4-x)^2 - x(4-x) - x - (4-x)$$
$$= 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4)$$
$$= 3(x-2)^2$$

DECRESCE in $[0, 2)$;
CRESCE in $(2, 4]$

$(1,1)$ MIN. REL.: $f(1,1) = -1$

$(2,2)$ MIN. REL.: $f(2,2) = 0$

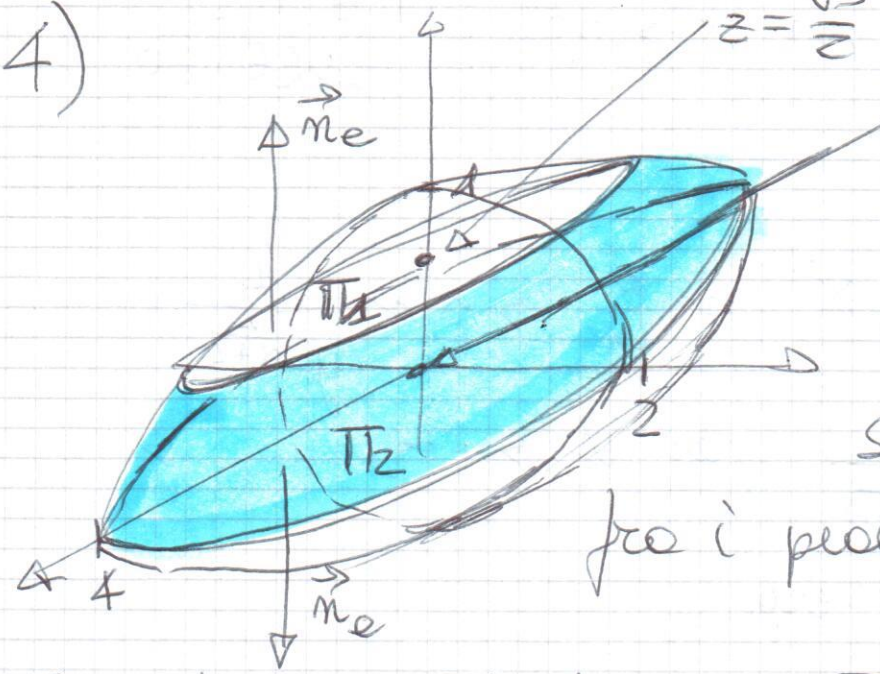
$(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 0)$ MIN. REL.: $f(0, \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$

$(0,4)$ e $(4,0)$ MAX. REL.: $f(0,4) = f(4,0) = 12$

$(0,0)$ MAX. REL.: $f(0,0) = 0$

MAX. ASS. $= 12$ in $(0,4)$ e in $(4,0)$; MIN. ASS. $= -1$ in $(1,1)$

4)



Ci interessa solo la parte di superficie compresa fra i piani $z=0$ e $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Consideriamo il dominio D compreso fra i due piani e l'ellissoide. Teorema della divergenza:

$$\Phi_{\partial D} = \Phi_{\mathcal{E}} + \Phi_{\Pi_1} + \Phi_{\Pi_2} = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_D 1\, dx\,dy\,dz = Vol(D)$$

$$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{E}} = Vol D - \Phi_{\Pi_1} - \Phi_{\Pi_2}$$

$$Vol D = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} Area\, S(z)\, dz \qquad \text{(PER STRATI)}$$

dove $S(z) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 - z^2}_{} \right\}$

$$\cancel{= \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi\, 4 \cdot 2} \qquad a = 4\sqrt{1-z^2}\,, \quad b = 2\sqrt{1-z^2}$$

$\Rightarrow$ Area $S(z) = \pi a b = 8\pi(1-z^2)$

$$\Rightarrow \text{vol} D = \int_0^{\sqrt{3}/2} 8\pi(1-z^2)\,dz = 8\pi\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}/2} =$$

$$= 8\pi\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{8}\right)\right] = 8\pi\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$$

$$= 3\sqrt{3}\,\pi$$

In Π_1: $\begin{cases} z = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$

$\vec{n}_e = (0,0,1) \qquad \vec{F}\Big|_{\Pi_1} = y^2\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n}_e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \Phi_{\Pi_1}(\vec{F}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Area $\Pi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,2\pi = \sqrt{3}\pi$

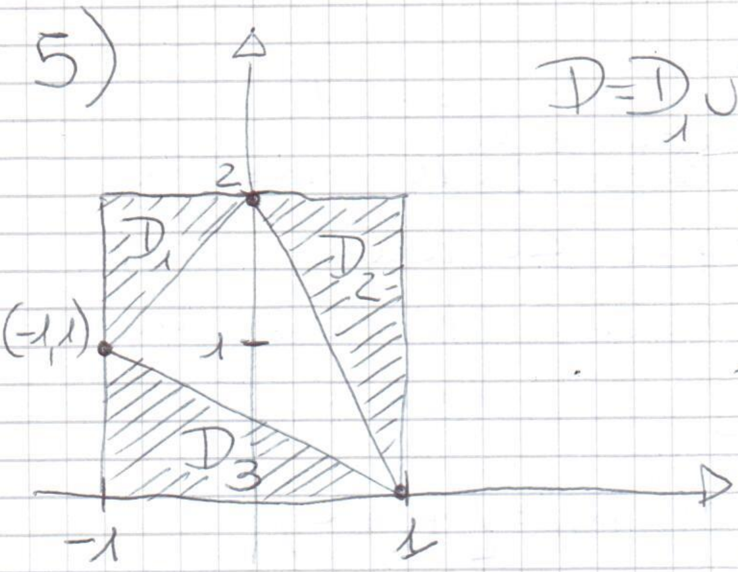
In Π_2: $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \qquad \vec{n}_e = (0,0,-1) \qquad \vec{F}\Big|_{\Pi_2} = y^2\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n}_e = 0 \Rightarrow \Phi_{\Pi_2}(\vec{F}) = 0$

$$\Rightarrow \Phi_{\Sigma}(\vec{F}) = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz - \Phi_{\Pi_1} - \Phi_{\Pi_2}$$

$$= 3\sqrt{3}\pi - \sqrt{3}\pi = 2\sqrt{3}\,\pi$$

5)



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$D_1 = \left\{ -1 \le x \le 0 \; ; \; 2+x \le y \le 2 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ 0 \le x \le 1 \; ; \; 2-2x \le y \le 2 \right\}$$

$$D_3 = \left\{ -1 \le x \le 1 ; \; 0 \le y \le \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right\}$$

$$= \iint_D xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} x\,dx \int_{2+x}^{2} y\,dy + \int_{0}^{1} x\,dx \int_{2-2x}^{2} y\,dy$$

$$+ \int_{-1}^{1} x\,dx \int_{0}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} y\,dy = \int_{-1}^{0} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{2+x}^{2} dx + \int_{0}^{1} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{2-2x}^{2} dx$$

$$+ \int_{-1}^{1} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{0}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} x \left[4 - (2+x)^2 \right] dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{0}^{1} x \left[4 - (2-2x)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \left(-x^3 - 4x^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \left(8x^2 - 4x^3 \right) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{8}{3}x^3 - x^4 \right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{16}x^4 \right]_{-1}^{1} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{8}.$$

6) $x(t)$ è sempre crescente: $x'(t) = 2 - 2\cos(2t) \geq 0$.

Questo comporta che la curva è semplice e non chiusa. Infatti:

$\vec{P}(0) = (0,0,0)$; $\vec{P}(\pi) = (2\pi, 0, 0)$.

$$\vec{\gamma}'(t) : \begin{cases} x'(t) = 2 - 2\cos(2t) \\ y'(t) = 2\sin(2t) \\ z'(t) = 4\cos(t) \end{cases}$$

La curva è regolare. Infatti:

$$\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{4(1-\cos(2t))^2 + 4\sin^2(2t) + 16\cos^2(t)}$$

$$= 2\sqrt{1 - 2\cos(2t) + \underbrace{\cos^2(2t) + \sin^2(2t)} + 4\cos^2(t)}$$

$$= 2\sqrt{2 - 2\left[\cancel{2\cos^2(t)} - 1\right] + \cancel{4\cos^2(t)}} = 4 > 0 \quad \forall t$$

Ne segue immediatamente che

$$\ell(\gamma) = \int_0^\pi 4\,dt = 4\pi$$

$\vec{\gamma}' \perp \vec{\gamma}''$ perché $\vec{\gamma}'$ ha norma costante, pertanto ~~la sua derivata~~ è perpendicolare alla sua derivata.

Infatti:

$$\vec{\gamma}''(t) = \begin{cases} x''(t) = 4\,\text{sen}(2t) \\ y''(t) = 4\cos(2t) \\ z''(t) = -4\,\text{sen}(t) \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}''(t) = 4\,\text{sen}(2t)\left[2 - \cancel{2\cos(2t)}\right]$$

$$+ \cancel{8\cos(2t)\,\text{sen}(2t)} - 16\cos t\,\text{sen}\,t$$

$$= 8\,\text{sen}(2t) - 8\,\text{sen}(2t) = 0 \qquad \forall t$$