SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di MATEMATICA del 21/2/22

1) $$\int_0^1 e^{3t}\,dt + 2\int_0^1 t e^t\,dt - \int_0^1 3t\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}e^{3t} - \frac{3}{2}t^2\right]_0^1 + 2\left[t e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{3}(e^3-1) - \frac{3}{2} + 2\left[e - e^t\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{3}(e^3-1) - \frac{3}{2} + 2\left[\cancel{e}-\cancel{e}+1\right] = \frac{1}{3}e^3 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{6}.$$

2) f definita su tutto $\mathbb{R}$, perché

$-x^2-12 = -(x^2+12) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x)=0 \iff x^2-2x+3=0$ ma $\Delta<0$

$\Rightarrow x^2-2x+3>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$\Rightarrow$ AS. ORIZZONTALE $y=-1$

per $x\to\pm\infty$.

3) $f \in C^0([0,1]) \Rightarrow$ per il teo. di Weierstrass ammette sicuramente MAX e MIN. ASSOLUTI.

$$f'(x) = e^x + 3e^{-3x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$ (2)

$\Rightarrow f$ crescente in $[0,1]$

$\Rightarrow$ MIN. ASS. in $x=0$: $f(0)=0$

MAX. ASS. in $x=1$: $f(1) = e - \frac{1}{e^3}$

4) MODA: 1,21 mm

MEDIANA: 1,21 mm

MEDIA: 1,24 mm.

5) Occorre standardizzare la distribuzione, ponendo $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-170}{10}$

dove $\mu = 170$ (valore atteso)

$\sigma = 10$ (deviazione standard)

i) $P(155 \le X \le 180) = P(-1,5 \le Z \le 1)$

$= \Phi(1) - \Phi(-1,5) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1,5)]$

per la simmetria della distribuzione

$= 0,8413 - 1 + 0,9332 = 0,7745$ ③

ii) $P(x \geq 200) = P(z \geq 3)$

$= 1 - P(z \leq 3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013.$

iii) $P(x \leq 160) = P(\cancel{z} \leq -1)$

$= 1 - P(z \leq 1) = 1 - \Phi(1)$

$= 1 - 0,8413 = 0,1587.$

6) Ricordo che un sistema omogeneo è SEMPRE compatibile, perchè $(0,0,0)$ è sempre soluzione.

Dobbiamo solo stabilire il numero di soluzioni, in base al rango della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & k-2 \\ k & k-1 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 8k - 2(k-1)(k-2)$$

$$= 2\left[8 - 4k - k^2 + 3k - 2\right] = -2(k^2 + k - 6)$$

$$= -2(k+3)(k-2) = 0$$

$\iff k=2 \; ; \; k=-3$

Per $k \neq 2, -3$ c'è la sola soluzione nulla (l'origine)

Per $k=2$ e $k=-3$, poiché

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \cancel{rg(A)}$$

$$2 \leq rg(A) < 3 \implies rg(A) = 2.$$

$\implies$ per $k=2$; $k=-3$ ∞^1 soluzioni (cioè una retta).

$$k=2: \quad \begin{cases} 2x = -2z \\ 4y = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$k=-3: \quad \begin{cases} 2x = -2z \\ 4y = 5z \end{cases} \implies \begin{pmatrix} -z \\ \frac{5}{4}z \\ z \end{pmatrix}$$