SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ESONERO di ANALISI 2 del 3/5/2023

COMPITO A

A1

1) $D_{cont} = \mathbb{R}$

Poiché $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow D_{C.P.} = D_{C.U.} = D_{cont} = \mathbb{R}$.

La funzione limite è $\varphi(x) = 0$.

Poiché $\sum \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| = \sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$

in quanto serie armonica di esponente $\frac{3}{2} > 1$,

$\Rightarrow D_{C.T.} = D_{C.U.} = D_{C.A.} = D_{C.P.} = \mathbb{R}$.

Poiché la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$, vale il teorema di integrabilità per serie in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$.

Si osservi, per inciso, che il teorema (cosa nota) non vale sui intervalli illimitati. Infatti, ad esempio,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n\sqrt{n}}dx = \frac{-\cos(n^2x)}{n^3\sqrt{n}}\Bigg|_0^{+\infty}$$ che NON ESISTE perché $\nexists \lim_{t\to+\infty} \cos(t)$

e quindi, a maggior ragione, non esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n\sqrt{n}}\,dx$$

mentre

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n\sqrt{n}}\,dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0.$$

La serie non è derivabile per serie perché

$$\sum \left(\varphi_n(x)\right)' = \sum \frac{n^2\cos(n^2x)}{n\sqrt{n}} = \sum \sqrt{n}\cos(n^2x)$$

che a causa della presenza di $\sqrt{n}$, non converge totalmente in alcun intervallo.

2) La curva è OVVIAMENTE piana, pertanto $\tau = 0$ e $\hat{B} = \pm(0,0,1)$. A3

$$\gamma' : \begin{cases} x'(t) = 2e^{2t} \\ y'(t) = e^{4t} - 1 \end{cases} \quad ; \quad \gamma'' : \begin{cases} x''(t) = 4e^{2t} \\ y''(t) = 4e^{4t} \end{cases}$$

$$v(t) = \sqrt{4e^{4t} + (e^{4t}-1)^2} = \sqrt{4e^{4t} + e^{8t} - 2e^{4t} + 1}$$
$$= (e^{4t}+1)$$

$$\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2e^{2t} & e^{4t}-1 & 0 \\ 4e^{2t} & 4e^{4t} & 0 \end{vmatrix} = 2e^{2t}(4e^{4t} - 2e^{4t} + 2)\hat{k}$$

$$\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\| = 4e^{2t}(e^{4t}+1)$$

$$= \underbrace{4e^{2t}(e^{4t}+1)}_{\searrow\, >0}\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = (0,0,1).$$

$$\hat{T} = \frac{1}{(e^{4t}+1)}(2e^{2t}, e^{4t}-1, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{N} = \hat{B} \wedge \hat{T} = \frac{1}{e^{4t}+1} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2e^{2t} & e^{4t}-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{e^{4t}+1}(1-e^{4t}, 2e^{2t}, 0).$$

$$k(t) = \frac{4e^{2t}(e^{4t}+1)}{(e^{4t}+1)^3} = \frac{4e^{2t}}{(e^{4t}+1)^2}$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \left(e^{4t}+1\right) dt = \frac{1}{4} e^{4t} + t \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^4 - 1\right) + 1 = \frac{1}{4}\left(e^4 + 3\right).$$

A_4

FAC:

$$k'(t) = 4\left[\frac{2e^{2t}\left(e^{4t}+1\right)^{\cancel{2}} - e^{2t}\cdot 2\,\cancel{\left(e^{4t}+1\right)}\,4e^{4t}}{\left(e^{4t}+1\right)^{\cancel{4}\,3}}\right].$$

$$= \frac{8e^{2t}}{\left(e^{4t}+1\right)^3}\left(e^{4t}+1-4e^{4t}\right) = \frac{8e^{2t}\left(1-3e^{4t}\right)}{\left(e^{4t}+1\right)^3} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow 1-3e^{4t} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow e^{4t} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Longleftrightarrow t \leq \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0$$

Pertanto $k(t)$ è decrescente in $[0,1]$

$$\Rightarrow k_{MAX} = k(0) = 1$$

$$k_{MIN} = k(1) = \frac{4e^2}{\left(e^4+1\right)^2}$$

3) CONTINUITÀ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}}|\cos\vartheta \sin\vartheta|}{\cancel{\rho}} \le \lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

$\Rightarrow f$ CONTINUA in $(0,0)$.

<u>DERIVATE PARZIALI:</u>

$$f(x,0) = f(0,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

<u>DERIVATE DIREZIONALI:</u>

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha|\beta| \cancel{t|t|}}{\cancel{t|t|}} = \alpha|\beta| \qquad \forall \alpha, \beta$$

se $\alpha = 0$ $\quad \frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = f_y(0,0) = 0$

Se $\beta = 0$ $\quad \frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = f_x(0,0) = 0$

<u>DIFFERENZIABILITÀ:</u>

Poiché $\frac{df}{d\vec{v}}(0,0)$ non è combinazione lineare delle derivate parziali,

$\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$. Infatti:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{h|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}\cos\vartheta|\sin\vartheta|}{\cancel{\rho^2}} \quad \nexists.$$