# SVOLGIMENTI PROVA di ESONERO di ANALISI 2 del 5/4/2022

1) $$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y-y^2}{x^2+|y|}\right| \leq \frac{|x^2y|}{|x^2|+|y|} + \frac{|y|^2}{x^2+|y|}$$

$$\leq \frac{|x^2y|}{|x^2|} + \frac{|y|^2}{|y|} = 2|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$ 1

$\Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0^\pm} \frac{-k^2}{|k|k} =$$

$$= -\lim_{k\to 0^\pm} \frac{|k|}{k} = \mp 1$$

$$\Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$\Rightarrow f$ NON differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\alpha^2\beta t^3 - \beta^2 t^2}{t\left[\alpha^2 t^2 + |\beta t|\right]} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t(\alpha^2\beta t - \beta^2)}{|t|\left[\alpha^2|t| + |\beta|\right]}$$

2

$$= \lim_{t \to 0^\pm} \frac{\beta(\alpha^2 t - \beta)}{\left[\alpha^2 |t| + |\beta|\right]} \cdot \lim_{t \to 0^\pm} \frac{t}{|t|} = \mp |\beta|$$

$\nexists \frac{df}{d\vec{v}}(0,0)$, a parte il caso $\beta = 0$:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

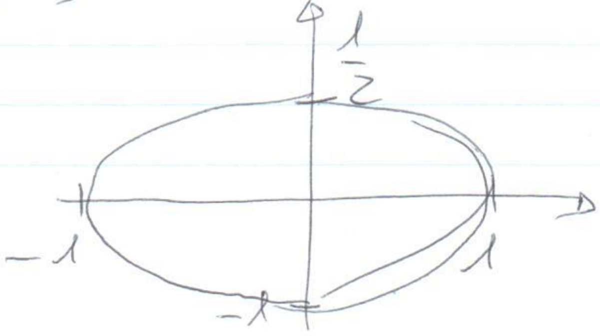
infatti è la $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

per $\vec{v} = (1,0)$

$$f(\cancel{x,y}) = 0 \iff x^2 y - y^2 = y(x^2 - y) = 0$$

2) In $\mathring{D}$: $f_x = \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}$; $f_y = \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$

$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff (x,y) = (0,0) \in \mathring{D}$$



$$f(0,0)=1 \Rightarrow \Delta f = f(x,y)-f(0,0)$$

$$= \frac{1}{1+x^2+y^2} - 1 = \frac{-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ PUNTO DI MASSIMO RELATIVO.

Ma poiché $\frac{1}{1+x^2+y^2} \leq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (0,0)$ PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO

Su $\partial D$: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{1}{1+x^2+y^2} - \lambda(x^2+4y^2-1)$

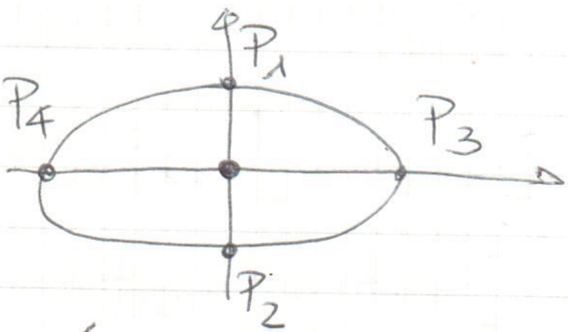
$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = \frac{-2x}{1+x^2+y^2} - 2x\lambda = -2x\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}+\lambda\right) = 0 \\ \mathcal{L}_y = \frac{-2y}{1+x^2+y^2} - 8y\lambda = -2y\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}+4\lambda\right) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2+4y^2-1) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{\frac{5}{4}} + 4\lambda\right) = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{1+x^2+y^2} \\ y\Big(\underbrace{\frac{3}{1+x^2+y^2}}_{>0}\Big) = 0 \\ x^2+4y^2-1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\frac{1}{2} \\ \lambda=-\frac{1}{5} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda=\frac{-1}{1+x^2+y^2} \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P_1=\left(0,\frac{1}{2}\right)$; $P_2=\left(0,-\frac{1}{2}\right)$; $P_3=(1,0)$; $P_4=(-1,0)$




f è simmetrica rispetto a entrambe gli assi.

$f(P_1)=\frac{4}{5}=f(P_2)$ ; $f(P_3)=\frac{1}{2}=f(P_4)$

$\Rightarrow$ MAX. ASSOLUTO in $(0,0)$

MIN. ASSOLUTO in $P_3$ e in $P_4$.

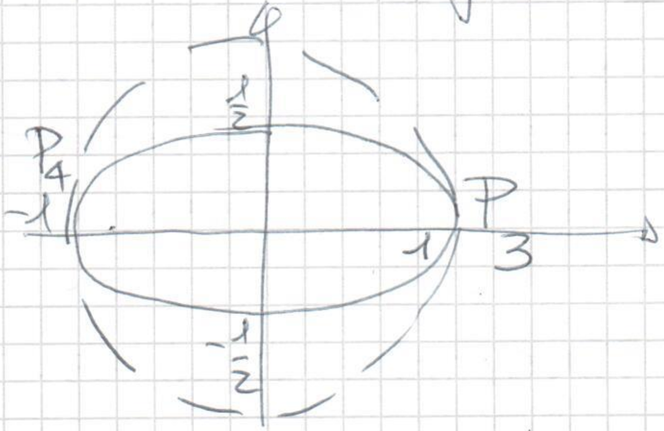
Si sarebbe potuto arrivare allo stesso risultato osservando che le curve di livello di f sono circonferenze:

$f(\rho)=\frac{1}{1+\rho^2}$ e che f decresce al crescere di $\rho$.

$\Rightarrow$ MAX. ASS. in $\rho=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$

MIN. ASS. lungo la circonferenza di raggio maggiore

$(\rho = 1$






3) $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \cancel{\frac{1+2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^{k+1}(k}{}}$

$$= \frac{1+2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{1+2^k k!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^{k+1}\cancel{(k+1)!}\,\cancel{k!}}{\cancel{(k+1)!}\,2^k\,\cancel{k!}}$$

$$= 2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}$

Negli estremi:

$x = \pm\frac{1}{2}$: $\frac{1+2^k k!}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2^k k!}{2^k k!} = 1 \not\to 0$

$\Rightarrow$ NO CONV. NEGLI ESTREMI.

CONV. ASS. e PUNTUALE in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

CONV. TOT. e UNIF. in ogni $[\alpha, \beta] \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Per la somma:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+2^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{k!} x^k$$

$$= e^x + \sum_{k=0}^{+\infty} (2x)^k = e^x + \frac{1}{1-2x} .$$

4)
$$\vec{r}\,' = \begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{t^2}\cos t - \frac{1}{t}\sin t \\ y'(t) = -\frac{1}{t^2}\sin t + \frac{1}{t}\cos t \\ z'(t) = 1 \end{cases} \longleftarrow \text{curva sempre regolare}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2}\left[\left(-\frac{1}{t}\cos t - \sin t\right)^2 + \left(-\frac{1}{t}\sin t + \cos t\right)^2\right] + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{t^2}\cos^2 t + \sin^2 t + \cancel{\frac{2}{t}\cos t \sin t} + \frac{1}{t^2}\sin^2 t + \cos^2 t - \cancel{\frac{2}{t}\sin t \cos t}\right] + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t^2} + 1\right) + 1} = \frac{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}{t^2}$$

Poiché $\frac{\sqrt{t^4+t^2+1}}{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$

$$\cancel{\Rightarrow \int_{2\pi}^{+\infty}} \quad \ell(\gamma) = \int_{2\pi}^{+\infty} v(t)\,dt = +\infty$$

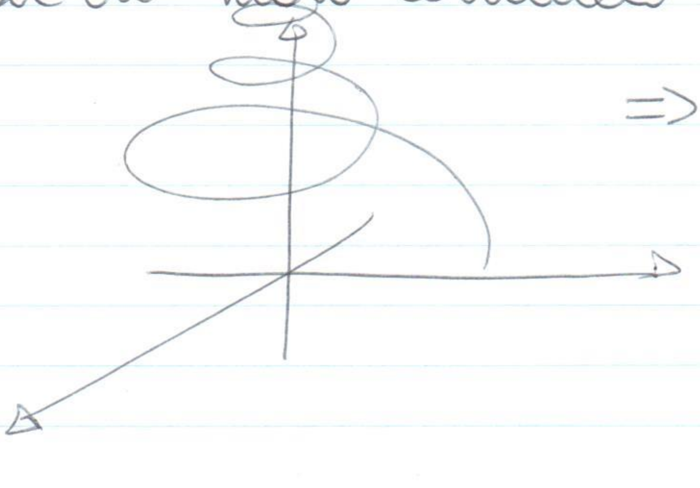
Poiché $z'(t) > 0 \Rightarrow$ la curva è semplice e non chiusa.

Per la planarità:

Si osservi che $x$ e $y$ si muovono su una spirale

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t}\cos t \\ y(t) = \frac{1}{t}\sin t \end{cases} \Rightarrow \rho(t) = \frac{1}{t}$$

~~che~~ di raggio tendente a 0. Pertanto $z$ si muove di moto rettilineo uniforme



$\Rightarrow$ La curva NON è planare.

Altrimenti, per via geometrica:
I punti corrispondenti a $t = k\pi$ $k \geq 2$ giacciono sul piano $y=0$. I punti corrispondenti a $t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ giacciono sul piano $x=0$.
Pertanto la curva non giace sullo stesso piano.

Per via analitica:

$$\vec{r}''(t) = \begin{cases} x''(t) = \dfrac{2}{t^3}\cos t + \dfrac{2}{t^2}\operatorname{sen} t - \dfrac{1}{t}\cos t \\ y''(t) = \dfrac{2}{t^3}\operatorname{sen} t - \dfrac{2}{t^2}\cos t - \dfrac{1}{t}\operatorname{sen} t \\ z''(t) = 0 \end{cases}$$

Calcolare $\hat{B} = \dfrac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}$

potrebbe essere molto complicato.
Pertanto decidiamo di calcolare $\hat{B}$ in due punti distinti e dimostrare che $\hat{B}$ varia.
Poichè in realtà la curva è definita in $(0, +\infty)$, per non appesantire i calcoli prenderemo in considerazione $\vec{r}' \wedge \vec{r}''$

in $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $t_1 = \pi$.

$$\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2}{\pi} & -\frac{4}{\pi^2} & 1 \\ \frac{8}{\pi^2} & \frac{16}{\pi^3} - \frac{2}{\pi} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3}\right)\vec{i} + \frac{8}{\pi^2}\vec{j} + \left[\frac{4}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4} + \frac{32}{\pi^4}\right]\vec{k}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^3}\right)\vec{i} + \frac{8}{\pi^2}\vec{j} + \frac{4}{\pi^2}\vec{k}$$

$$\left(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\right)(\pi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\pi^2} & -\frac{1}{\pi} & 1 \\ -\frac{2}{\pi^3} + \frac{1}{\pi} & \frac{2}{\pi^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\vec{i} + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^3}\right)\vec{j} + \left[\frac{2}{\pi^4} - \frac{2}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2}\right]\vec{k}$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\vec{i} + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^3}\right)\vec{j} + \frac{1}{\pi^2}\vec{k}$$

Come si può vedere, i coefficienti di $\vec{j}$ e $\vec{k}$ in $t = \frac{\pi}{2}$ sono proporzionali, ma non lo sono in $t = \pi$. Quindi $\hat{B}$ non è costante