SVOLGIMENTI ESONERO DI ANALISI 1 del 17/11/2022.

COMPITO A

(Gli esercizi degli altri compiti sono simili)

1)
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos^3 x}{x\ln(1+2x)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\,(2x)}\right]$$

[dal prodotto notevole $(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$]

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1-\cos x)}{x^2}\right]\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

2) $e^{i\frac{\pi}{2}} z \cdot (\bar{z})^2 - \mathrm{Re}\, z + i|z|^2 \mathrm{Im}\, z = 0$ (2)

$$i\, z \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} - x + i|z|^2 y = 0$$

$$i|z|^2(x - iy) - x + i|z|^2 y = 0$$

$$i|z|^2(x + y) + |z|^2 y - x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z|^2(x+y) = 0 \\ |z|^2 y - x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z|^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ -x\underbrace{(|z|^2+1)}_{\neq 0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0,0) \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Unica soluzione: $z = 0$.

3)

CONVERGENZA ASSOLUTA:

$$\sum |a_k| = \sum \frac{1}{\ln k + k^\alpha}$$

$$\ln k + k^\alpha \sim \begin{cases} k^\alpha & \text{se } \alpha > 0 \\ \ln k & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente per $\alpha > 1$; diverge assolutamente per $0 \leq \alpha \leq 1$.

CONVERGENZA SEMPLICE:

Per $\alpha > 1$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente.

Per $\alpha = 0$ $\quad \sum a_k = \sum \frac{(-1)^k}{\ln k + 1}$

che converge per Leibniz: $\frac{1}{\ln k + 1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$|a_k| \geq |a_{k+1}|$ perchè $\ln(k+1) + 1 > \ln k + 1$

Per $0 < \alpha \leq 1$ (4)

$\ln k + k^{\alpha}$ è somma di due successioni positive crescenti $\Rightarrow$ è crescente

$$\Rightarrow \quad |a_k| > |a_{k+1}| \qquad \forall k \geq 1$$

Inoltre $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\ln k + k^{\alpha}} = 0$

$\Rightarrow$ CONV. SEMPLICE $\quad \forall \; 0 < \alpha \leq 1$

$\Rightarrow$ CONV. ASS. per $\alpha > 1$; DIV. ASS. per $0 \leq \alpha \leq 1$

CONV. SEMPLICE $\forall \alpha \geq 0$

FAC.: se $\alpha < 0$ $\Rightarrow$ ~~$\beta = -\alpha > 0$~~

$$|a_k| \geq |a_{k+1}| \iff \frac{1}{\ln k + k^{\alpha}} \geq \frac{1}{\ln(k+1) + (k+1)^{\alpha}}$$

$$\iff \ln(k+1) - \ln k \geq k^{\alpha} - (k+1)^{\alpha}$$

$$\iff \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq k^{\alpha}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\alpha}\right]$$

$$1-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{k} > 0$$ 5

(si ricordi che $\alpha < 0$)

$\Rightarrow$ almeno definitivamente

$$|a_k| \geq |a_{k+1}| \quad \text{se} \quad \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \geq k^{\alpha}\left(-\frac{\alpha}{k}\right)$$

$$\Longleftrightarrow k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \geq -\alpha k^{\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right] \geq -\alpha k^{\alpha}$$

Si osservi che $\lim\limits_{k\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right] = 1$

mentre, per $\alpha<0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\left[-\alpha k^{\alpha}\right] = 0^{+}$

quindi, almeno definitivamente,

$$|a_k| > |a_{k+1}|$$

Inoltre, per $\alpha < 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\ln k + k^{\alpha}} = \frac{1}{\infty + 0} = 0$$

(MA NON ASSOLUTAMENTE)

$\Rightarrow$ la serie converge semplicemente anche per $\alpha < 0$.