SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 15/2/2018

1) La curva non può essere piana, essendo di tipo elicoidale. Infatti, mentre x e y si muovono su una circonferenza, z è lineare nel parametro. <u>SENZA CONTI</u>

Altrimenti, si sarebbe potuti arrivare allo stesso risultato determinando $\vec{B}$ o la torsione τ.

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|}$$

Ovviamente, non è necessario calcolare il VERSORE binormale per determinarne l'eventuale costanza rispetto a t. Basterà calcolare

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t).$$

Altrimenti:

$$\tau = \frac{-(\vec{r}(t) \wedge \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\|^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t) = 0$$

$\cancel{\vec{B}}$

$$\vec{r}\,'(t): \begin{cases} x'(t) = 2t \operatorname{sen}(t^2) \\ y'(t) = 2t\cos(t^2) \\ z'(t) = 2 \end{cases}$$

$$\vec{r}\,''(t): \begin{cases} x''(t) = 2\operatorname{sen}(t^2) + 4t^2\cos(t^2) \\ y''(t) = 2\cos(t^2) - 4t^2\operatorname{sen}(t^2) \\ z''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}\,'''(t): \begin{cases} x'''(t) = 12t\cos(t^2) - 8t^3\operatorname{sen}(t^2) \\ y'''(t) = -12t\operatorname{sen}(t^2) - 8t^3\cos(t^2) \\ z'''(t) = 0 \end{cases}$$

$\underline{\underline{\vec{B}}}$:

$$\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,'''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & 2 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[-4\cos(t^2) + 8t^2\operatorname{sen}(t^2)\right]\vec{i}$$

$$+ \left[+4\operatorname{sen}(t^2) + 8t^2\cos(t^2)\right]\vec{j}$$

$$+ \left[4t\,\cancel{\operatorname{sen}(t^2)\cos(t^2)} - 8t^3\operatorname{sen}^2(t^2) \cancel{-4t\operatorname{sen}(t^2)\cos(t^2)} - 8t^3\cos^2(t^2)\right]\vec{k}$$

$$= 4\left[2t^2 \sin(t^2) - \cos(t^2)\right]\vec{i}$$ (3)

$$+ 4\left[2t^2 \cos(t^2) + \sin(t^2)\right]\vec{j} - 8t^3\,\vec{k}$$

Questo vettore NON è costante

$\Rightarrow$ la curva NON è piana

Si osservi che $\|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)\| =$

$$4\sqrt{\begin{aligned}&4t^4\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2) - \cancel{4t^2\sin(t^2)\cos(t^2)}\\ &+4t^4\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2) + \cancel{4t^2\sin(t^2)\cos(t^2)} + 4t^6\end{aligned}}$$

$$= 4\sqrt{4t^4 + 1 + 4t^6}$$ (non necessario)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^4+4t^6}}\begin{pmatrix} 2t^2\sin(t^2) - \cos(t^2) \\ 2t^2\cos(t^2) + \sin(t^2) \\ -8t^3 \end{pmatrix}$$

τ: $(\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t) =$

$$\begin{vmatrix} x''' & y''' & 0 \\ x' & y' & 2 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x''' & y''' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$

$$= -2 \Big[\left(12t\cos(t^2) - 8t^3 \operatorname{sen}(t^2)\right)\left(2\cos(t^2) - 4t^2\operatorname{sen}(t^2)\right) - \left(-12t\operatorname{sen}(t^2) - 8t^3\cos(t^2)\right)\left(2\operatorname{sen}(t^2) + 4t^2\cos(t^2)\right) \Big]$$

$$= -16 \Big[3t\cos^2(t^2) \cancel{-6t^3\cos(t^2)\operatorname{sen}(t^2)} \cancel{-2t^3\operatorname{sen}(t^2)\cos(t^2)} + 4t^5\operatorname{sen}^2(t^2) + 3t\operatorname{sen}^2(t^2) \cancel{+6t^3\cos(t^2)\operatorname{sen}(t^2)} \cancel{+2t^3\cos(t^2)\operatorname{sen}(t^2)} + 4t^5\cos^2(t^2) \Big]$$

$$= -16\left(3t + 4t^5\right) = -16t\left(3 + 4t^4\right) = 0$$

$$\iff t = 0.$$

Quindi la torsione non è costantemente nulla e quindi la curva NON è piana.

$$\ell(\gamma) = \int_0^\pi v(t)\,dt =$$

$$\int_0^\pi \sqrt{4t^2\operatorname{sen}^2(t^2) + 4t^2\cos^2(t^2) + 4}\,dt$$

$$= \int_0^\pi 2\sqrt{t^2+1}\,dt$$

~~Questo integrale è~~

Questo è un integrale notevole, risolvibile ponendo $t = \mathrm{Sh}\, u$, oppure per parti, ma la sua soluzione è riportata in mie note aggiuntive (online) o, meglio ancora, sul BPS 2, a p. 71, esempio 4.3...

$$\ell(\gamma) = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \Big[\mathrm{Sh}(t)\,\mathrm{Ch}(t) + t\Big]_0^{\mathrm{SettSh}(\pi)}$$

$$\cancel{= \Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{Sh}(2t) + t\Big]_0^{\mathrm{SettSh}(\pi)}}$$

$$= \pi\, \mathrm{Ch}(\mathrm{SettSh}(\pi)) + \mathrm{SettSh}(\pi)$$

$$= \pi \sqrt{1+\mathrm{Sh}^2(\mathrm{SettSh}(\pi))} + \mathrm{SettSh}(\pi)$$

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} + \log\left(\pi + \sqrt{1+\pi^2}\right).$$

2) È una SERIE DI POTENZE: ⑥
ponendo $e^{-x}=t$, si ottiene la
SERIE LOGARITMICA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}$$

convergente a $-\log(1+t)$.

CONV. PUNTUALE per $t \in (-1,1]$

CONV. ASS. per $t \in (-1,1)$

CONV. UNIF. per $t \in [-h,1]$
con $0<h<1$

CONV. TOT. per $t \in [-h,h]$.

SENZA CONTI.

$\Rightarrow$ CONV. PUNTUALE per $e^{-x} \in (-1,1]$
$\Rightarrow x \geq 0$

CONV. ASSOLUTA $\Rightarrow x>0$

CONV. UNIF. $\Rightarrow x \geq 0$

CONV. TOT. $\Rightarrow x \geq \alpha$, con $\alpha>0$.

SOMMA: $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{-nx}}{n} = -\log(1+e^{-x})$.

Altrimenti, calcoliamo R:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

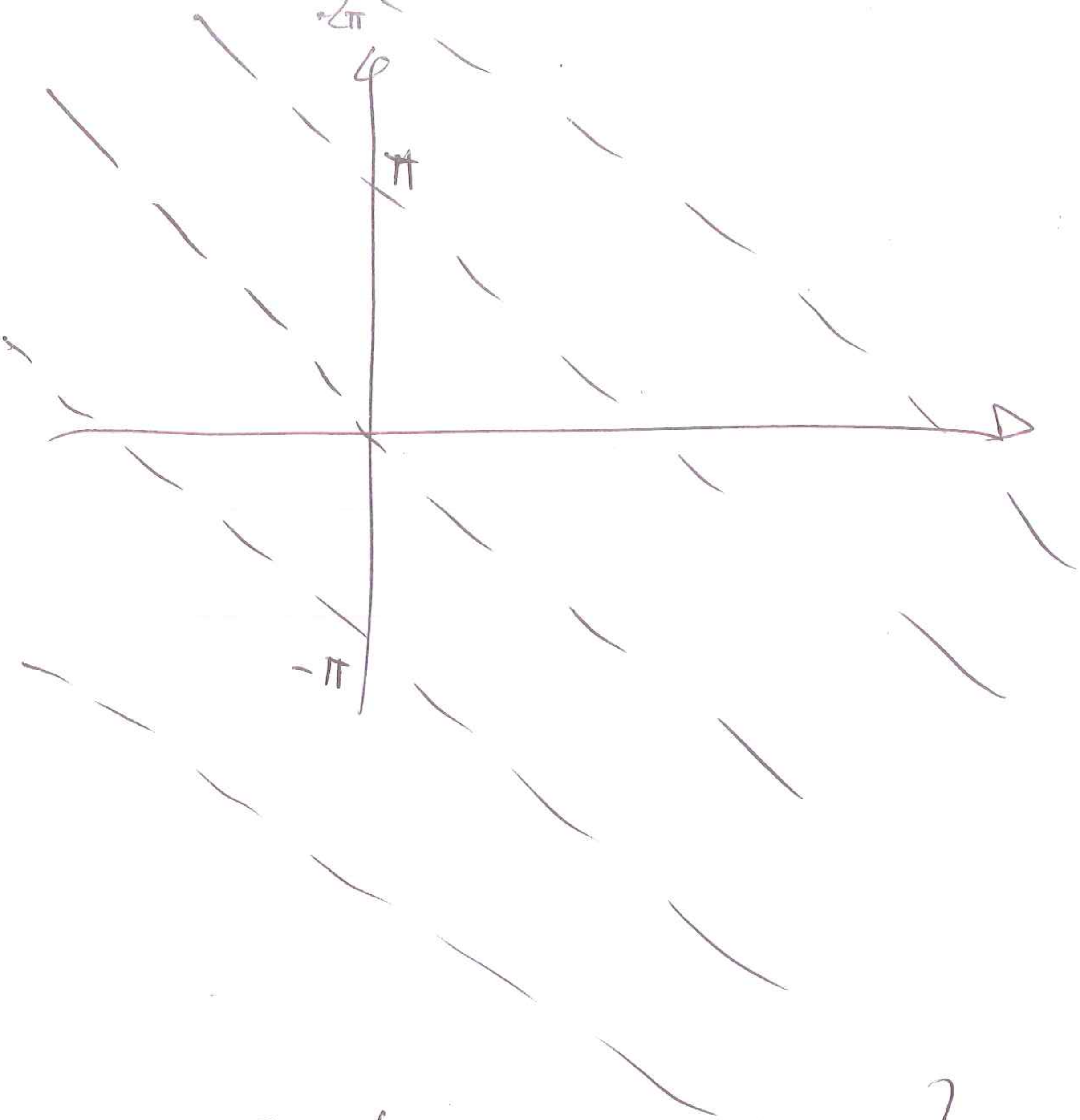
$\Rightarrow R=1$; ecc. ecc. ecc.

3) f è C^∞, quindi differenziabile, derivabile e continua, lì dove è definita $\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y)\neq 0$

$$\Rightarrow x+y \neq k\pi \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y\neq -x+k\pi$$

QUESTE SONO INFINITE RETTE PARALLELE ALLA BISETTRICE DEL 2° E 4° QUADRANTE.



$$D = \mathbb{R}^2 - \{ y = -x + k\pi \, ; \, k \in \mathbb{Z} \}$$

In D: $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\cos(x+y)}{\sin^2(x+y)}$

$$\Rightarrow \frac{df}{d\vec{v}}(x,y) = \frac{-\cos(x+y)}{\sin^2(x+y)} (v_1 + v_2)$$

dove $\vec{v} = (v_1, v_2)$ è la direzione

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$\Rightarrow$ Il piano tangente ha equazione $z=1$.

4) $$\begin{cases} f_x = 3x^2y-12y=0 \\ f_y = x^3-6y-12x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y(x^2-4)=0 \\ x^3-6y-12x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x(x^2-12)=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=2 \\ 8-6y-24=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-2 \\ -8-6y+24=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{P_1}{\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}} \cup \overset{P_2}{\begin{cases} y=0 \\ x=\sqrt{12} \end{cases}} \cup \overset{P_3}{\begin{cases} y=0 \\ x=-\sqrt{12} \end{cases}} \cup \overset{P_4}{\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{8}{3} \end{cases}}$$

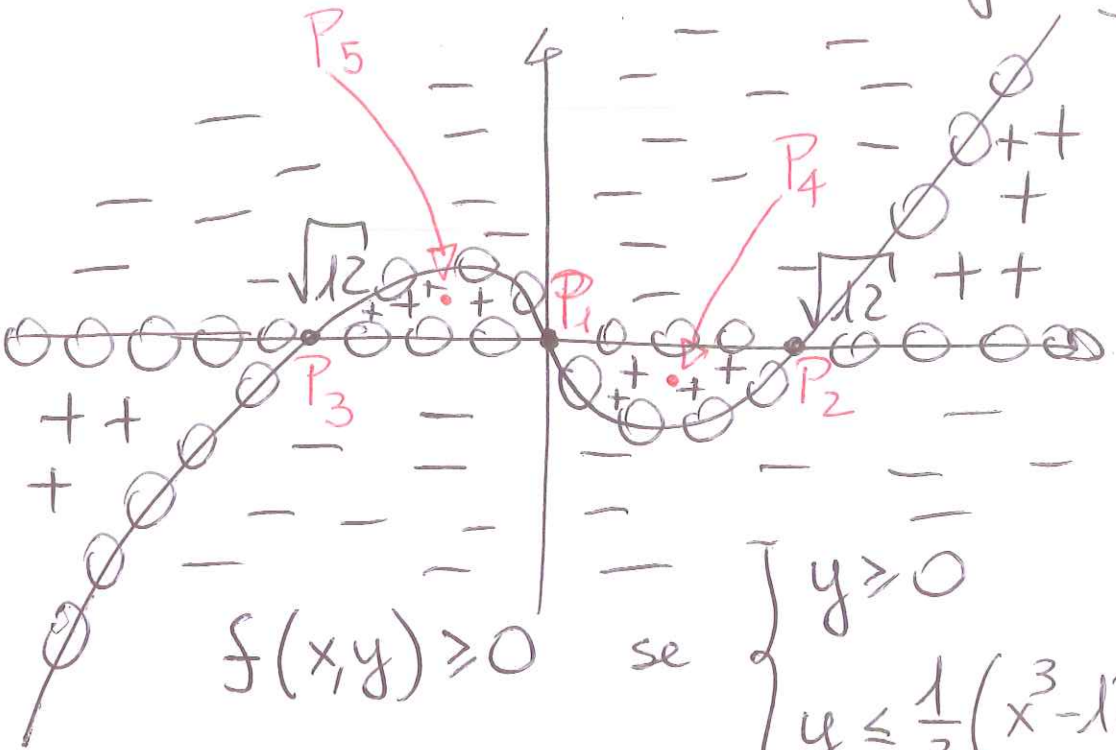
$$\cup \begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$$

Si osservi che (non necessario)

$$f(x,y) = y\left[x^3 - 3y - 12x\right]$$

si annulla per $y=0$ e per

$$y = \frac{1}{3}(x^3 - 12x)$$



$$f(x,y) \geq 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq \frac{1}{3}(x^3 - 12x) \end{cases} \cup \begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq \frac{1}{3}(\;) \end{cases}$$

Quindi si può già determinare il fatto che P_1, P_2 e P_3 sono di sella, mentre si prevede che P_4 e P_5 siano di max. rel., essendo punti stazionari in una zona di positività di f. In ogni caso, era sufficiente lavorare con l'hessiano

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 6xy & 3x^2-12 \\ 3x^2-12 & -6 \end{vmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = -144 < 0$$ selle

$$H_f(0, \pm\sqrt{12}) = \begin{vmatrix} 0 & 24 \\ 24 & -6 \end{vmatrix} = -(24)^2 < 0$$ sella

$$H_f\left(\pm 2, \mp \frac{8}{3}\right) = \begin{vmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$$ punti di MAX. REL. (autovalori negativi)

Poichè, ad esempio,

$$f(x,1) = x^3 - 12x - 3 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$$

la funzione non ammette MAX. o MIN. ASSOLUTI.

5) Il campo è definito in

$D = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z)\}$, dominio molteplicemente connesso.

Il campo è irrotazionale:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \left[\frac{\left(xz^2y\, e^{xyz}(x^2+y^2) + zx^2 e^{xyz} + z e^{xyz}\, 3y^2 - 2x^2 z\right)(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3}} - \frac{\left(e^{xyz} yz(x^2+y^2) - 2x e^{xyz}\right) 2\cancel{(x^2+y^2)}\, 2y}{(x^2+y^2)^{3}} \right]$$

$$= \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)^3} \left[\left(xz^2y\,(x^2+y^2) + zx^2 + 3y^2 z - 2x^2 z\right)(x^2+y^2) - \left(4y^2 z(x^2+y^2) - 8xy\right) \right]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3}} \left[\left(yz e^{xyz}\, xz(x^2+y^2) + e^{xyz} y^2 z + e^{xyz}\, 3x^2 z - 2y^2 z\right)(x^2+y^2) - 2\cancel{(x^2+y^2)}\, 2x \left(e^{xyz} xz(x^2+y^2) - 2y e^{xyz}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^3} e^{xyz} \Big[\big(yxz^2(x^2+y^2) + 3x^2z - y^2z \big)(x^2+y^2) - 4x^2z\,(x^2+y^2) + 8xy \Big]$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)^3} \Big[(x^2+y^2)\big(x^3z^2y + xz^2y^3 + 3y^2z - x^2z - 4y^2z \big) + 8xy \Big]$$

$$= \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)^3} \Big[(x^2+y^2)\big(x^3z^2y + xz^2y^3 - y^2z - x^2z \big) + 8xy \Big]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)^3} \Big[(x^2+y^2)\big(yx^3z^2 + y^3xz^2 + 3x^2z - y^2z - 4x^2z \big) + 8xy \Big]$$

$$= \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)^3} \Big[(x^2+y^2)\big(x^3z^2y + y^3xz^2 - x^2z - y^2z \big) + 8xy \Big]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)^3}\left[(x^2+y^2)^2 z\,(xzy-1) + 8xy \right]$$

$$= \frac{\partial Y}{\partial x}$$

~~Analogamente~~

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[xye^{xyz}\left(yz(x^2+y^2)-2x\right) + e^{xyz}y(x^2+y^2) \right]$$

$$= \frac{e^{xyz}y}{(x^2+y^2)^2}\left[xyz(x^2+y^2) + (x^2+y^2) - 2x^2 \right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = y\left[\frac{\left(e^{xyz} + xyz\,e^{xyz}\right)(x^2+y^2) - 2x^2ye^{xyz}}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$= \frac{e^{xyz}y}{(x^2+y^2)^2}\left[(x^2+y^2) + xyz(x^2+y^2) - 2x^2 \right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Il campo è irrotazionale.

Per essere conservativo devo verificare se ogni circuitazione attorno alla lacuna (asse z) sia nulla. Basta verificarlo per una lacuna. Consideriamo la circonferenza $C: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{F}(\cos\theta, \sin\theta, 0) = -2\cos\theta\,\vec{i} - 2\sin\theta\,\vec{j} + \sin\theta\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot\vec{t}\,ds = \int_0^{2\pi} \left[+2\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta \right] d\theta$$

$$= 0.$$

Il campo è conservativo.
Cerchiamone potenziale:

$$U(x,y,z) = \int \frac{xy\, e^{xyz}}{(x^2+y^2)}\, dz$$

$$= \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)} + \varphi(x,y)$$

$$U_x = \frac{yz\, e^{xyz}(x^2+y^2) - 2x e^{xyz}}{(x^2+y^2)^2} + \varphi_x(x,y)$$

$$= X = \frac{e^{xyz} yz (x^2+y^2) - 2x e^{xyz}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_x(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \varphi = \varphi(y)$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)} + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow U_y = \frac{e^{xyz} xz (x^2+y^2) - 2y\, e^{xyz}}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y)$$

$$= Y = \frac{e^{xyz} xz (x^2+y^2) - 2y\, e^{xyz}}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\Rightarrow \varphi = c$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)} + c$$

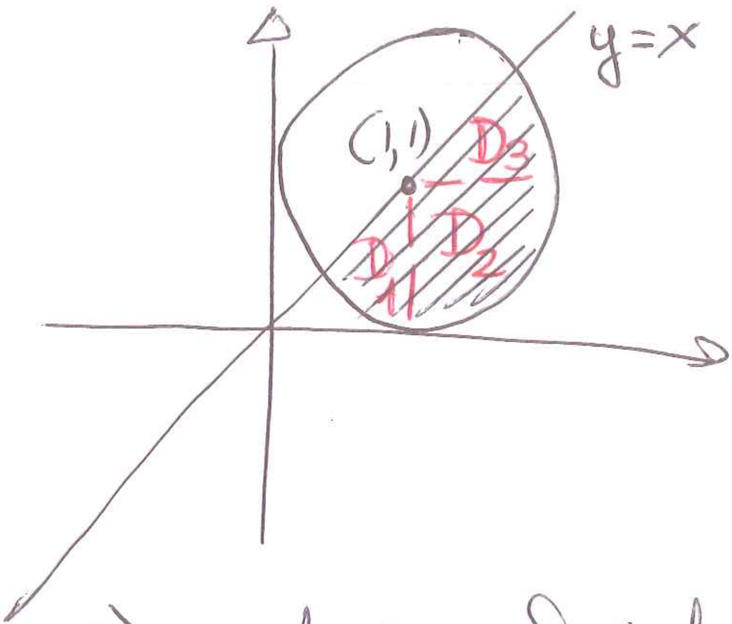
Chiediamo che $U(1,2,0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} + c = 0 \quad \Rightarrow c = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x,y,z) = \frac{e^{xyz}}{(x^2+y^2)} - \frac{1}{5}}$$

SI OSSERVI CHE SAREBBE STATO SUFFICIENTE RICOSTRUIRE IL POTENZIALE, CHE È DEFINITO E C^∞ ~~NELL'INS~~ IN D, SENZA PASSARE PER L'IRROTAZIONALITÀ, EVITANDO MOLTI CONTI

6) $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x ; \underbrace{(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1}_{\text{cerchio centrato in } (1,1) \text{ e di raggio } 1.} \}$

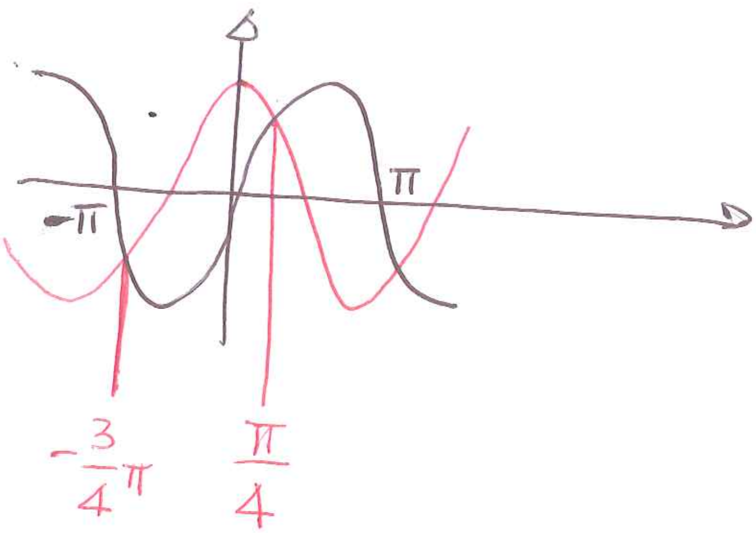


Coordinate polari decentrate:

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos\vartheta \\ y = 1 + \rho \sin\vartheta \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 1 + \rho \sin\vartheta \leq 1 + \rho \cos\vartheta$

$\Rightarrow \quad \sin\vartheta \leq \cos\vartheta$



$\Rightarrow \quad \vartheta \in \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4} \right]$, come evidente anche dal grafico.

$\rho^2 \leq 1$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \rho \leq 1$

$$\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^1 \rho\, \rho\cos\vartheta\, \rho\sin\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta \sin\vartheta \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 \cdot \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right] = 0$$

Il risultato non è sorprendente perché ~~il contributo~~ la funzione integranda è tale che il contributo all'integrale in D_2 è opposto alla somma dei contributi in D_1 e D_3, come si può ricavare osservando le simmetrie della funzione rispetto al punto $(1,1)$.