SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 29/1/2018.

1) $\begin{cases} x'(t) = R(1-\cos t) \\ y'(t) = R\sin t \end{cases}$

$$\cancel{\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} v(t)\,dt = \int_0^{2\pi}}$$

a)

$$\int_\gamma \sqrt{y}\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{R(1-\cos t)}\; v(t)\,dt =$$

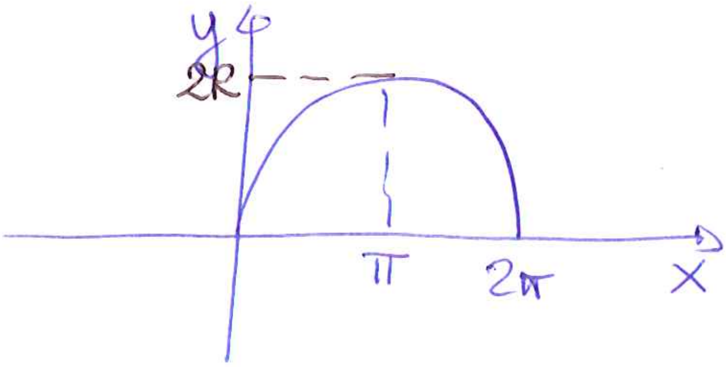
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R(1-\cos t)} \cdot \sqrt{R^2(1-\cos t)^2 + R^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{R^3}\,(1-\cos t)\,dt$$

$$= \sqrt{2R^3}\,\Big[t - \sin t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2R^3}$$

b) La curva è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$

$\Rightarrow x_B = \pi.$



c) Come visto, $v(t) = R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$ ②

La lunghezza della curva è nota, ~~...~~ ma la ricalcoliamo egualmente:

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1-\cos t}\cdot\sqrt{1+\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R\sqrt{2}\,\frac{|\sin t|}{\sqrt{1+\cos t}} = \text{(per la simmetria della curva)}$$

$$= 2R\sqrt{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}\,dt$$

$$= -2R\sqrt{2}\left[2\sqrt{1+\cos t}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -4R\sqrt{2}\left[-\sqrt{2}\right] = 8R.$$

$$\Rightarrow \boxed{y_B} = \frac{\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{1-\cos t}\, R\sqrt{2}}{\ell(\gamma)}\, dt$$

$$= \frac{R\sqrt{2}}{8R}\int_0^{2\pi} R(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}R}{8}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}R}{8}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)(1+\cos t)}}{\sqrt{1+\cos t}}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}R}{8}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos t)\,|\sin t|}{\sqrt{1+\cos t}}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}R}{4}\int_0^{\pi} \frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}\, dt \qquad (*)$$

Ma $1+\cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$1-\cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$\sin t = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}R}{4}\int_0^{\pi} \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}}{\sqrt{2}\,\cancel{\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|}}\,dt$$ ④

$$\boxed{\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0 \quad \forall t \in [0,\pi]}$$

$$= R\int_0^{\pi} \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$= R\int_0^{\pi} \left[1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$= 2R\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= 2R\left[1-\frac{1}{3}\right] = \underline{\frac{4}{3}R}$$

In alternativa, si sarebbe potuto risolvere l'integrale (*) per sostituzione:

$$v = \sqrt{1+\cos t} \qquad v^2 = 1+\cos t$$

$$dv = \frac{1}{2\sqrt{1+\cos t}}(-\sin t)\,dt$$

$$v(0) = \sqrt{2}$$

$$v(\pi) = 0$$

$$1-\cos t = 2 - v^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{(1-\cos t)\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}\,dt = -2\int_{\sqrt{2}}^{0} (2-v^2)\,dv$$

$$\cancel{\int_{\sqrt{2}}^{0} \frac{(2-v^2)}{v}} \qquad = -2\left[2v - \frac{v^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{0}$$

$$= -2\left[-2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y_B = \frac{\sqrt{2}R}{4}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}R.$$

2) È una serie di potenze

$$a_k = \frac{k!}{k^k}$$

RAGGIO DI CONVERGENZA:

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{(k+1)}\, k^k}{(k+1)^k \cancel{(k+1)}} = \frac{1}{\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow R = e$$

Per $x = \pm e$:

$$|a_k| = \left|\frac{k!\,(\pm e)^k}{k^k}\right| \underbrace{\sim}_{\substack{k\to\infty \\ \text{formula} \\ \text{di Stirling}}} \frac{\cancel{k^k}\sqrt{2\pi k}\,\cancel{e^k}}{\cancel{e^k}\,\cancel{k^k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

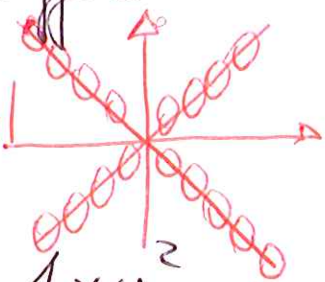
NON C'È CONVERGENZA, nè PUNTUALE, nè ASSOLUTA, NEGLI ESTREMI

$\Rightarrow$ CONV. ASS. e PUNT. in $(-e, e)$

CONV. UNIF. e TOT. in ogni $[-\alpha, \alpha]$, con $0 < \alpha < e$

3) f è ovviamente C^∞ in ogni punto diverso dall'origine. Quindi differenziabile, derivabile e continua.

$f(x,y)=0 \iff |x|=|y|$



Formula del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{df}{d\vec{v}}(x,y) = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\left[y v_1 - x v_2\right]$$

dove $\vec{v}=(v_1,v_2)$ è la direzione di derivazione.

In $(0,0)$:

CONTINUITÀ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0}\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right) = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta$$

Il limite dipende da ϑ $\Rightarrow$ NO CONTINUITÀ $\Rightarrow$ NO DIFF.BILITÀ

8

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2} v_1^2 - \cancel{t^2} v_2^2}{t \cdot \cancel{t^2} \underbrace{(v_1^2+v_2^2)}_{=1}} =$$

$$\lim_{t\to 0} (v_1^2 - v_2^2)\frac{1}{t} = 0 \iff v_1 = \pm v_2$$

Se $v_1 \neq \pm v_2$
$\nexists \lim_{t\to 0} (v_1^2-v_2^2)\frac{1}{t} = \pm\infty.$

cioè lungo le bisettrici dei quadranti.
Infatti, lungo tali rette $(y = \pm x)$
$f(x, \pm x) = 0$.

Lungo tutte le altre direzioni $\nexists \frac{df}{d\vec{v}}$

Quindi non esistono le derivate parziali.

4) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (9)

$f(-1,0)=0 \Rightarrow P=(-1,0)$ punto di MIN. ASS.

a) PUNTI STAZIONARI:

$$f_x = \frac{1}{3\sqrt[3]{[(x+1)^2+y^2]^2}} \, 2(x+1)$$

$$f_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{[(x+1)^2+y^2]^2}}$$

Nel punto $(-1,0)$ in cui si annullano i numeratori, si annullano anche i denominatori. Quindi devo calcolare le derivate in $(-1,0)$ direttamente:

$$f_x(-1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} h^{-\frac{1}{3}} = \pm\infty$$

$$f_y(-1,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt[3]{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0^\pm} k^{-\frac{1}{3}} = \pm\infty$$

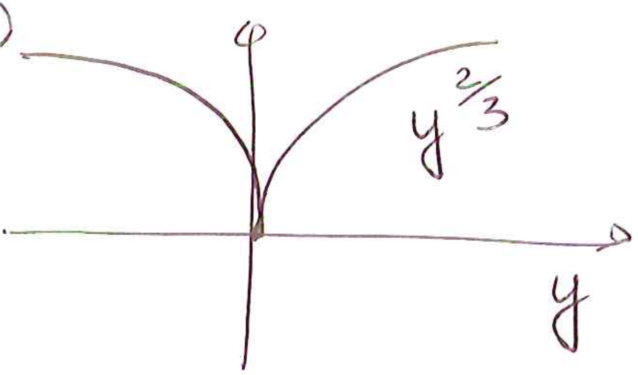
f NON È DERIVABILE IN $(-1,0)$
$\Rightarrow \nexists$ PUNTI STAZIONARI.

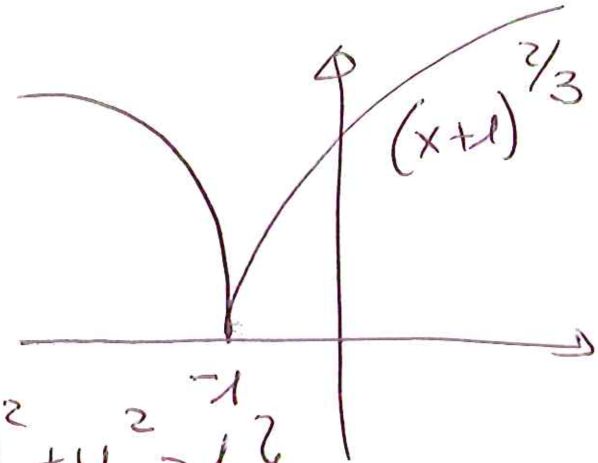
MA $(-1,0)$ È PUR SEMPRE PUNTO di MIN. ASSOLUTO.

SI SAREBBE POTUTO OSSERVARE, IN OGNI CASO, CHE

$$f(-1,y) = y^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad f(x,0) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

le quali hanno un punto di non derivabilità (CUSPIDE) rispettivamente in $y=0$ e $x=-1$

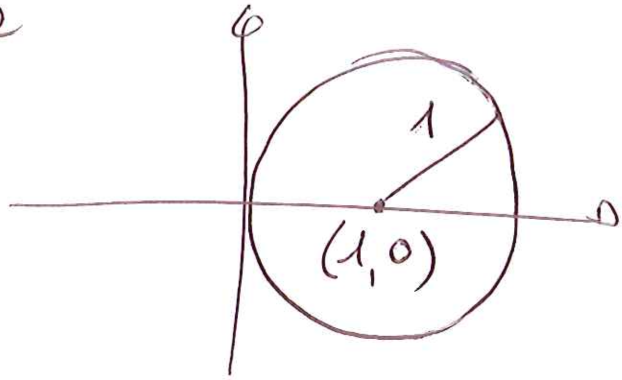




b)

D è $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2=1\}$

cioè la circonferenza

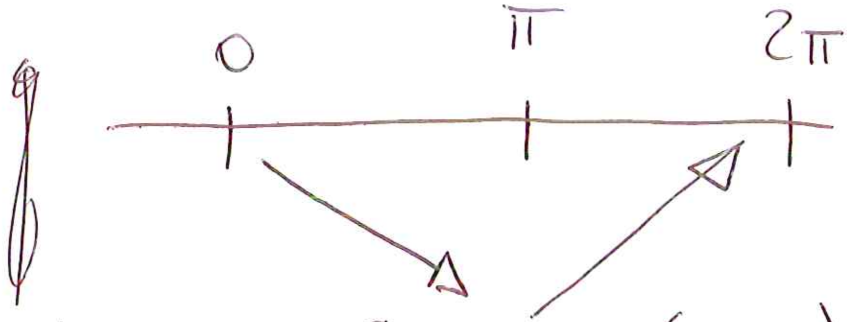


Usiamo le coordinate polari:

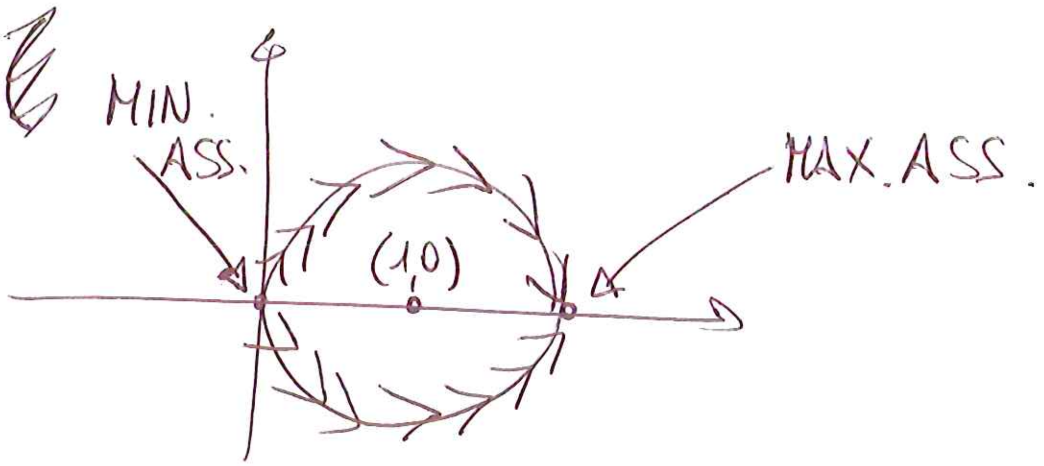
$$\begin{cases} x = 1 + \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \end{cases}$$

$$f(\vartheta) = \sqrt[3]{(2+\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = \sqrt[3]{5 + 4\cos\vartheta}$$

$$f'(\vartheta) = \frac{1}{3(5+4\cos\vartheta)^{2/3}} \cdot (-4\sin\vartheta)$$



f(ϑ) decresce ~~da~~ in $(0, \pi)$ e
cresce in $(\pi, 2\pi)$



$f(0,0) = 1$ MIN. ASS.

$f(2,0) = \sqrt[3]{9}$ MAX. ASS.

In alternativa, con i moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\sqrt[3]{(x+1)^2+y^2}-\lambda\left[x^2-2x+y^2\right]$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x=\dfrac{2(x+1)}{3\left[(x+1)^2+y^2\right]^{2/3}}-2\lambda\left[(x-1)\right]=0 \\[2ex] \mathcal{L}_y=\dfrac{2y}{3\left[(x+1)^2+y^2\right]^{2/3}}-2\lambda y=0 \\[2ex] x^2-2x+y^2=0 \end{cases}$$

Poichè $x\neq -1$ $\Rightarrow$ dalla prima

$$\frac{2}{3\left[(x+1)^2+y^2\right]^{2/3}}=\frac{2\lambda(x-1)}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\lambda y(x-1)}{(x+1)}-2\lambda y=0$$ nella seconda

$$\Rightarrow 2\lambda y\left[\frac{x-1}{x+1}-1\right]=0 \Rightarrow 2\lambda y\left(\frac{-2}{x+1}\right)=0$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 & (\text{secondo}) \\ x^2 - 2x = 0 & (\text{terzo}) \\ \dfrac{2}{3(x+1)^{1/3}} = 0 & (\text{primo}) \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x = 0 & (\text{terzo}) \\ \dfrac{2}{3(x+1)^{1/3}} - 2\lambda(x-1) = 0 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ \dfrac{2}{3} + 2\lambda = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \\ \dfrac{2}{3(3)^{1/3}} - 2\lambda = 0 \end{cases}$$

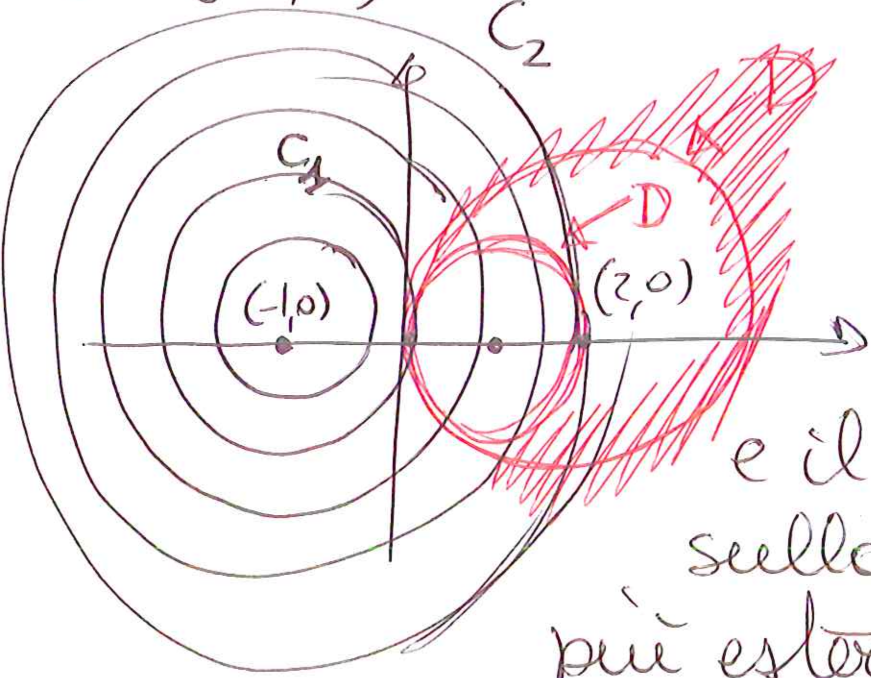
$$\Rightarrow P_1 \equiv \left(0, 0, -\frac{1}{3}\right) \quad ; \quad P_2 \equiv \left(2, 0, \frac{1}{3^{4/3}}\right)$$

punti stazionari per la Lagrangiana

$f(0,0) = 1$ MIN. ASS.

$f(2,0) = \sqrt[3]{9}$ MAX. ASS.

Si sarebbe anche potuto osservare che le linee di livello di f sono circonferenze concentriche, centrate in $(-1,0)$. Pertanto il valore minimo su D si ha in corrispondenza della circonferenza più interna (C_1) e il valore massimo sulla circonferenza più esterna (C_2).



SENZA CONTI.

5) La superficie è ~~...~~ l'emisfero superiore dell'ellissoide

$$9x^2+4y^2+z^2=1,$$

il cui bordo è la curva

$$\begin{cases} 9x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Il flusso è dato dalla circuitazione

$$\oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot \vec{t} \, ds$$

$\cancel{= \int_0^{2\pi}}$

coordinate ellittiche:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\cos\vartheta \\ y = \frac{1}{2}\sin\vartheta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{2}\sin\vartheta \cdot \underbrace{\log 1}_{=0} \cdot x'(\vartheta) + \frac{1}{3}\cos\vartheta \log 2 \, y'(\vartheta) \Big] d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\log 2 \cos\vartheta \, \frac{1}{2}\cos\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{6}\log 2 \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{12}\log 2 \int_0^{2\pi} \left[\cos 2\vartheta + 1\right] d\vartheta$$

$$= \frac{1}{12}\log 2 \left[\frac{1}{2}\sin 2\vartheta + \vartheta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{6}\pi \log 2 .$$

6)

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x\, dz$$

$$= \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy$$

$$= \int_0^1 x\, dx \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}$$

$$= \int_0^1 x \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[x - 2x^2 + x^3\right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{6-8+3}{12}\right) = \frac{1}{24}.$$