SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 27/6/2019.

1) Poichè $x \geq 0$, le $\varphi_n(x)$ sono definite $\forall x \geq 0$. $\varphi_n(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

$$\varphi_n(0) = +1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x \ln n}{x n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0 \qquad \forall x > 0$$

Dunque $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Poichè $\varphi_n(x) \in C^\infty([0,+\infty)) \quad \forall n \geq 1$

e $\varphi(x)$ NON è continua in 0, NON può essere convergenza uniforme in $[0,+\infty)$. Infatti

~~Verificando anche con la derivata~~

$$|\varphi_n - \varphi| = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x \ln n + 1}{x n^2 + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\sup_{[0,+\infty)} |\varphi_n-\varphi| \geq \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x\ln n+1}{xn^2+1}\right] = 1 \not\to 0 \quad (n\to+\infty)$$

Verifichiamolo anche con la derivata:

$$|\varphi_n-\varphi|' = \frac{\ln n\,(xn^2+1)-(x\ln n+1)n^2}{(xn^2+1)^2}$$ ②

$$= \frac{\ln n - n^2}{(xn^2+1)^2} < 0 \qquad \forall x>0$$

(perché $\ln n < n^2 \quad \forall n \geq 1$)

Dunque $|\varphi_n-\varphi|$ decresce in $(0,+\infty)$.

$$\Rightarrow \sup_{(0,+\infty)} |\varphi_n-\varphi| = \lim_{x\to 0^+} \varphi_n = 1 \not\to 0$$

mentre

$$\sup_{[\alpha,+\infty)} |\varphi_n-\varphi| = \varphi_n(\alpha) = \frac{\alpha\ln n+1}{\alpha n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Dunque CONV. UNIF. in $[\alpha,+\infty)$, $\forall \alpha>0$,

NO CONV. UNIF. in $(0,+\infty)$.

Poiché, per $n \to +\infty$, $\forall x > 0$

$$\varphi_n(x) \sim \frac{x \ln n}{x n^2} = \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$ converge (serie di Abel),

la serie $\sum \varphi_n(x)$ converge ASS. e SEMPL. $\forall x > 0$

(N.B.: $\sum \varphi_n(0) = \sum 1$ diverge).

Per la convergenza totale, stesse considerazioni fatte per la convergenza uniforme di $\{\varphi_n(x)\}$.

$$\sup_{(0,+\infty)} |\varphi_n| = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln n + 1}{x n^2 + 1} = 1$$

e $\sum 1$ diverge

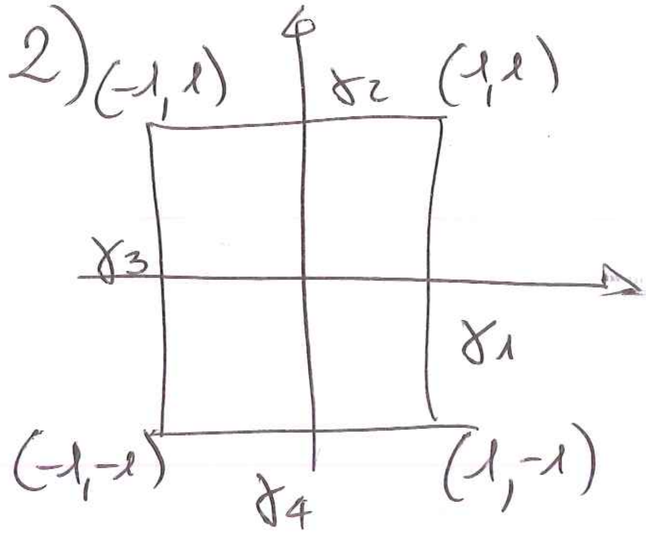
$$\sup_{[\alpha,+\infty)} |\varphi_n| = \frac{\alpha \ln n + 1}{\alpha n^2 + 1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$ converge.

$\Rightarrow$ NO CONV. TOTALE in $(0,+\infty)$

SÌ CONV. TOTALE in $[\alpha,+\infty)$ $\forall \alpha>0$

2)



f è SIMMETRICA rispetto agli assi e rispetto all'origine.

$f(x,y)\geq 0$

$f(0,0)=0$ MIN. ASS.

PUNTI STAZIONARI:

$$\begin{cases} f_x = 2x(1-x^2-y^2)\,e^{-1-x^2-y^2}=0 \\ f_y = 2y(1-x^2-y^2)\,e^{-1-x^2-y^2}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \cup \left\{ x^2+y^2=1 \right\}$$

MIN. ASS., già determinato.

già compreso qui

TUTTI I PUNTI APPARTENENTI ALLA CIRCONFERENZA $x^2+y^2=1$ SONO STAZIONARI.

lo studio di tali punti con l'hessiano è lungo e inutile. Infatti:

$$f_{xx}(x,y) = 2\left(1-5x^2-y^2+2x^4+2x^2y^2\right)e^{-1-x^2-y^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4xy\left(2-x^2-y^2\right)e^{-1-x^2-y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = 2\left(1-x^2-5y^2+2x^2y^2+2y^4\right)e^{-1-x^2-y^2}$$

$$\cancel{H\left(x^2+y^2=1\right)} \qquad f_{xx}\left(x, y^2=1-x^2\right) = \frac{-4x^2}{e^2}$$

$$f_{xy}\left(x, y=1-x^2\right) = f_{yx}\left(x, y=1-x^2\right) = \frac{-4xy}{e^2}$$

$$f_{yy}\left(x^2=1-y^2, y\right) = \frac{-4}{e^2}y^2$$

$$\Rightarrow H\left(x^2+y^2=1\right) = \begin{vmatrix} -\frac{4x^2}{e^2} & -\frac{4xy}{e^2} \\ -\frac{4xy}{e^2} & -\frac{4y^2}{e^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{16x^2y^2}{e^4} - \frac{16x^2y^2}{e^4} = 0.$$

Si determino la natura dei punti di $x^2+y^2=1$ tramite la simmetria radiale; ponendo $r=\sqrt{x^2+y^2}$, studiamo

5b

$$\tilde{f}(r) = r^2 e^{-1-r^2} \quad ; \quad \tilde{f}'(r) = (2r-2r^3)e^{-1-r^2}$$
$$= 2r(1-r^2)e^{-1-r^2} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq r \leq 1.$$

$\tilde{f}(0) = 0$

$\tilde{f}(1) = \frac{1}{e^2}$

Quindi $\tilde{f}$ cresce in $[0,1)$ e decresce in $(1,+\infty)$.

Dunque $r=1$ è punto di MAX. ASS.

$$\tilde{f}(r=1) = f(x^2+y^2=1) = \frac{1}{e^2} \quad \text{MAX. ASS.}$$

Tutti i punti sulla circonferenza sono di MAX. ASS. per f

Perché tutta la circonferenza ~~appartiene~~ è contenuta in D, si ha che in D

MIN. ASS in $(0,0)$

MAX. ASS. lungo $\{x^2+y^2=1\}$.

Per la ricerca dei MAX e MIN. REL, studiamo f sulla frontiera.

Sulla frontiera:

$$f\big|_{\gamma_1} = f\big|_{\gamma_3} = f(\pm 1, y) = (1+y^2)e^{-2-y^2} = g(y)$$

$$g'(y) = [2y - 2y(1+y^2)]e^{-2-y^2} = -2y^3 e^{-2-y^2} \geq 0$$

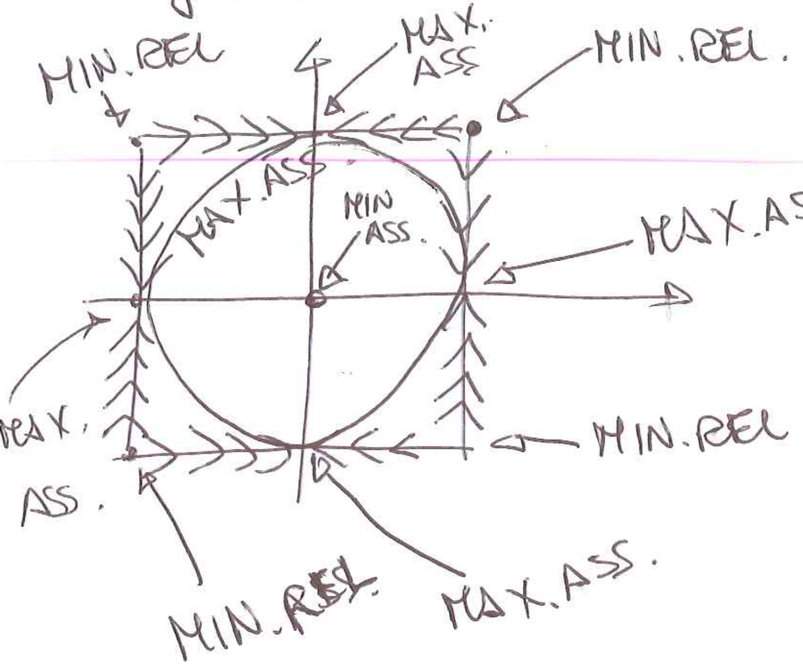
$$\iff y \leq 0$$

Quindi $f\big|_{\gamma_1}$ e $f\big|_{\gamma_3}$ crescono per $y \in [-1, 0]$ e decrescono per $y \in (0, 1]$.

Per simmetria radiale,

$$f\big|_{\gamma_2} = f\big|_{\gamma_4} = f(x, \pm 1) = (1+x^2)e^{-2-x^2} = g(x)$$

$$g'(x) = -2x^3 e^{-2-x^2} \geq 0 \iff x \leq 0$$



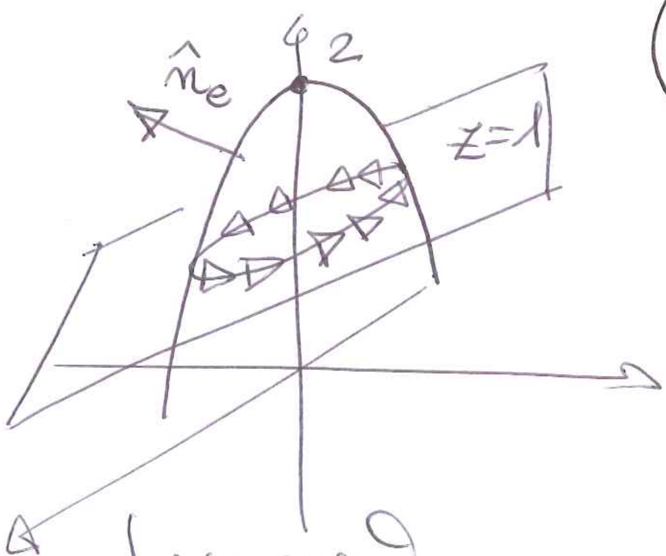
$$f(\pm 1, \pm 1) = \frac{2}{e^3}$$

MIN. REL.

3) $z = 2 - x^2 - y^2$

(paraboloide)

Superficie con bordo.



BS: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \\ z = 1 \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$

6b

Teorema del rotore (7)

$$\underset{S}{\Phi}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right) = \oint_{BS^+} \omega$$

dove $\omega = 2y\,dx - 2x\,dy + 2z^3 \operatorname{arctg} y$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\sin\vartheta(-\sin\vartheta) - 2\cos\vartheta(\cos\vartheta)\right] d\vartheta$$

$$= -4\pi.$$

Altrimenti, direttamente col flusso:

$(L, M, N) = \pm(2x, 2y, 1)$
poiché $\hat{n}_e$ è rivolto verso l'alto.

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \frac{2z^3}{1+y^2}\vec{i} - 4\vec{k}$$

$$\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)\cdot\vec{n}_e = \frac{4z^3 x}{1+y^2} - 4$$

$$\Rightarrow \underset{S}{\Phi}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right) = \iint_{D(x,y)} \left[\frac{4x(2-x^2-y^2)}{1+y^2} - 4\right] dx\,dy$$

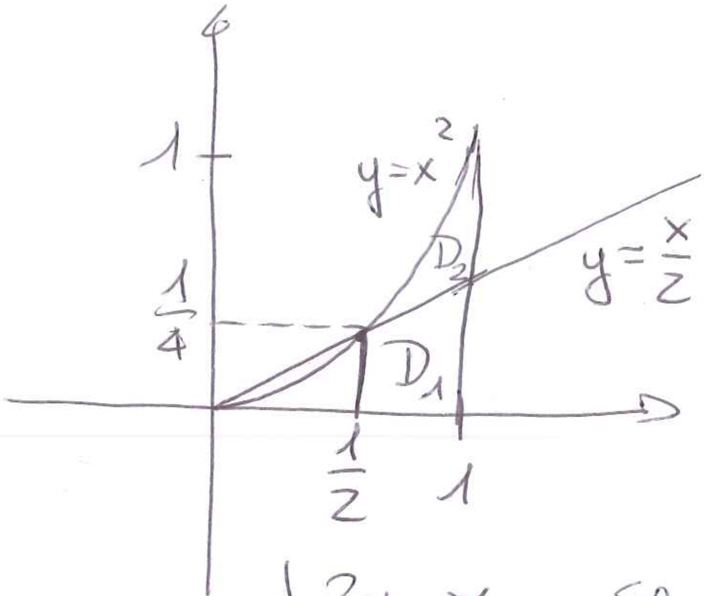
$$= 4\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \left[\frac{\rho\cos\vartheta\,(2-\rho^2)}{1+\rho^2 \sin^2\vartheta} - 1 \right] \rho\, d\rho \qquad 8$$

$$= -4\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho\, d\rho + 4\int_0^1 \rho(2-\rho^2)\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho\cos\vartheta}{1+\rho^2\sin^2\vartheta}\, d\vartheta$$

$$= -8\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 + 4\int_0^1 (2-\rho^2)\rho\, d\rho \underbrace{\left[\operatorname{arctg}(\rho \sin\vartheta) \right]_0^{2\pi}}_{=0}$$

$$= -4\pi.$$

4) (9)



$$|2y-x| = \begin{cases} 2y-x & \text{se } y \geq \frac{x}{2} \\ x-2y & \text{se } y < \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 ; \ 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \right\}$$

$$\cup \left\{ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 ; \ \frac{x}{2} \leq y \leq x^2 \right\}$$

$$\iint_D |2y-x| \, dx\, dy = \iint_{D_1} (x-2y)\, dx\, dy$$

$$+ \iint_{D_2} (2y-x)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{\frac{x}{2}} (x-2y)\, dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{\frac{x}{2}}^{x^2} (2y-x)\, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \left[xy - y^2 \Big|_0^{\frac{x}{2}} + y^2 - xy \Big|_{\frac{x}{2}}^{x^2} \right]$$ (10)

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + x^4 - x^3 - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \right]$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \left[\frac{x^2}{2} + x^4 - x^3 \right] = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{160} - \frac{1}{64} \right)$$

$$= \frac{7}{60} - \frac{22}{1920} = \frac{224-22}{1920} = \frac{202}{1920} = \frac{101}{960}$$

5) $\omega = \omega_1 + \omega_2$ definito in $\mathbb{R}^2$

con $\omega_1 = e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy$

ESATTA

$\omega_2 = 3y \, dx - 2y \, dy$ NON ESATTA

$$\oint_{\mathcal{E}} \omega = \underbrace{\oint_{\mathcal{E}} \omega_1}_{=0} + \oint_{\mathcal{E}} \omega_2$$

11

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = 2\sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\mathcal{E}} \omega = \int_0^{2\pi} \left[6 \sin\vartheta (-\sin\vartheta) - 8 \sin\vartheta \cos\vartheta \right] d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[3 (\cos 2\vartheta - 1) - 4 \sin 2\vartheta \right] d\vartheta$$

$$= \left[3 \left(\frac{\sin 2\vartheta}{2} - \vartheta \right) + 2 \cos 2\vartheta \right]_0^{2\pi}$$

$$= -6\pi.$$

In alternativa, si può applicare la formula di Gauss-Green:

$$\oint \omega = \iint_D \left[Q_x - P_y \right] dx\,dy$$

$$= \iint_D \left[e^x \cancel{\cos y} - (e^x \cancel{\cos y} + 3) \right] dx\,dy =$$

$$= -3 \, \text{Area}\, D = -6\pi$$

dove D è il dominio ellittico, tale che $\mathcal{E} = \partial D$.