SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 29/1/2019

1)
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0 \qquad \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

La funzione in oggetto è prolungabile per continuità. ~~Infatti~~

Raggio di convergenza:

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R = +\infty.$$

La serie converge assolutamente e puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.

La serie converge uniformemente in ogni compatto.

In particolare converge uniformemente in $[-1,1]$ $\Rightarrow$

$$\underline{\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx} = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_{-1}^{1} x^{2k}\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \underline{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2}{(2k+1)!\,(2k+1)}}$$

~~Stima dell'~~
<u>errore</u>: La serie ottenuta è a segno alterno; pertanto

$$|R_{2N+1}| = \left| \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k 2}{(2k+1)!\,(2k+1)} - \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx \right|$$

$$\leq |a_{2N+3}|$$ in virtù del criterio di Leibniz.

Poiché $|a_7| = \frac{2}{7!\,7}$

$\Rightarrow$ è sufficiente fermarsi a $N = 2$ (cioè $n = 5$)

$$|R_5| = \left| \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k 2}{(2k+1)!\,(2k+1)} - \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx \right|$$

$$\le |a_7| = \frac{2}{7!\,7}.$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1 - \frac{2}{3!\cdot 3} + \frac{2}{5!\cdot 5} + \mathcal{E}_5$$

$$= 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{300} + \mathcal{E}_5$$

$$= \frac{803}{900} + \mathcal{E}_5, \quad \text{con } |\mathcal{E}_5| \le \frac{2}{7!\,7}$$

2) La funzione risulta essere omogenea, di grado $\beta = 4 - 2\alpha$.

Pertanto essa risulta continua in $(0,0)$ se $\beta > 0$, cioè se $\alpha < 2$.

Non essendo costante, risulta discontinua $\forall \alpha \geq 2$.

Inoltre, essa risulta differenziabile in $(0,0)$ se $\beta > 1$, cioè se $\alpha < \frac{3}{2}$.

Non essendo lineare, risulta non differenziabile in $(0,0)$ $\forall \alpha \geq \frac{3}{2}$.

In tutti gli altri punti, la funzione risulta continua, derivabile e differenziabile, $\forall \alpha > 0$.

Verifichiamo direttamente le proprietà su $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\rho\to 0} \left| \frac{\rho^4 \cos\vartheta \sin\vartheta \cos 2\vartheta}{\rho^{2\alpha}} \right|$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^{4-2\alpha} \left| \frac{\sin 2\vartheta}{2} \cos 2\vartheta \right|$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^{4-2\alpha} \left| \frac{\sin 4\vartheta}{4} \right|$$

Se $\alpha < 2 \implies \lim |f(x,y)| \leq \frac{1}{4} \lim_{\rho\to 0} \rho^{4-2\alpha} = 0$

uniformemente rispetto a ϑ.

Se $\alpha = 2$, ~~il limite~~ $\lim |f(x,y)| = \lim_{\rho\to 0} \left| \frac{\sin 4\vartheta}{4} \right|$ che non esiste

Se $\alpha > 2$, il limite non esiste, perché, ad esempio,

se $\vartheta = 0$, $\lim f(x,y) = 0$

se $\vartheta = \frac{\pi}{8}$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^{2\alpha - 4}} \cdot \frac{1}{4} = +\infty$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

DIFFERENZIABILITÀ:

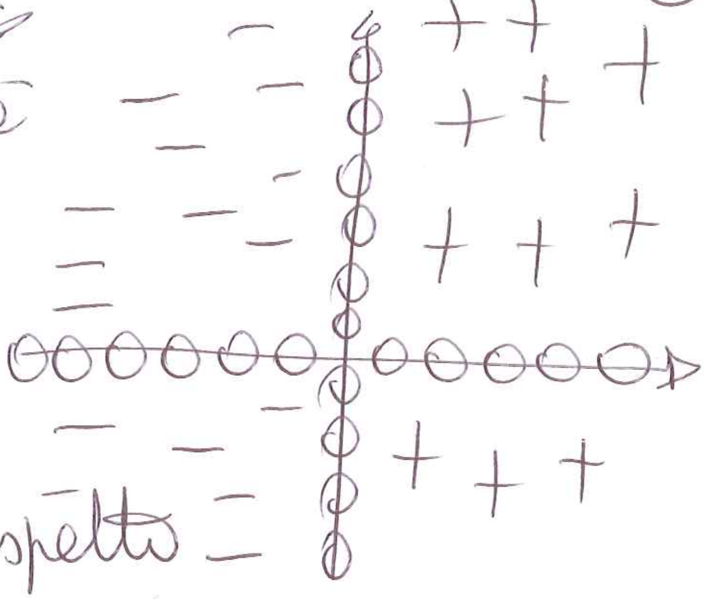
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \frac{\sin 4\vartheta}{4}}{\rho^{2\alpha+1}}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \rho^{3-2\alpha} \cdot \frac{\sin 4\vartheta}{4}.$$

Si ripetono le stesse considerazioni fatte per la continuità:

per $3 - 2\alpha > 0$, cioè $\alpha < \frac{3}{2}$, differenziabilità. Per $\alpha \geq \frac{3}{2}$, non differenziabilità.

3) ~~Punti stazionari~~



f risulta simmetrica rispetto all'asse x:

$$f(x,-y)=f(x,y)$$

e antisimmetrica rispetto all'asse y: $f(-x,y)=-f(x,y)$

$$f(x,y)\geq 0 \quad \forall x>0.$$

Punti stazionari: $f_x = y^2\left[\dfrac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}\right]$

$$= \frac{y^2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f_y=\frac{2xy}{x^2+1}=0 \iff xy=0$$

cioè $\begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Si hanno pertanto infiniti punti stazionari, lungo l'asse x $\{y=0\}$.

Visto il segno di $f(x,y)$, si ricava che i punti lungo il semiasse delle $x>0$ sono di MIN. REL.

i punti lungo il semiasse delle $x<0$ sono di MAX. REL.

l'origine è punto di sella.

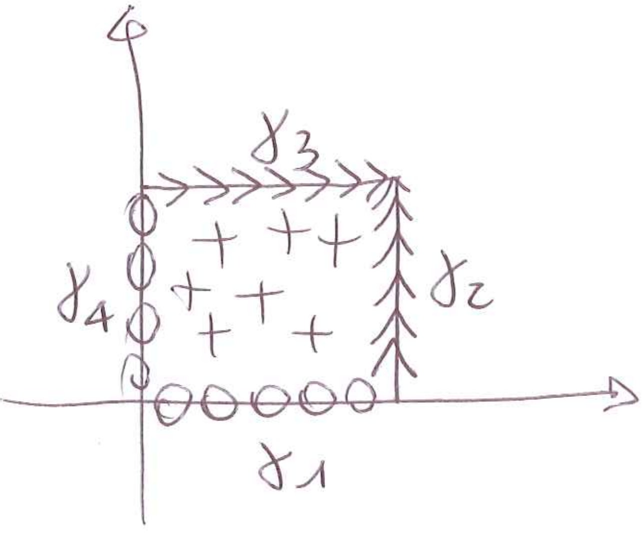
Poichè, ad esempio, lungo la retta $y=x$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \pm\infty,$$

la funzione è illimitata e non ammette quindi MAX. o MIN. ASS.

Sul quadrato:

non ci sono punti stazionari in $\mathring{E}$.



Lungo la frontiera: I punti lungo γ_1 e γ_4

$$f\big|_{\gamma_1} = f\big|_{\gamma_4} = 0$$ sono PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO

Lungo γ_2: $\begin{cases} x = 1 \\ y \in [0,1] \end{cases}$

$$f\big|_{\gamma_2} = \frac{y^2}{2}$$ funzione crescente (parabola) al crescere di y.

Lungo γ_3: $\begin{cases} y = 1 \\ x \in [0,1] \end{cases}$

$$f\big|_{\gamma_3} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \iff 1 - x^2 > 0$$

$\iff -1 < x < 1$. Quindi lungo γ_3 f è strettamente crescente, al crescere di x.

$\Rightarrow (1,1)$ punto di MAX. ASS. 10

$f(1,1) = \frac{1}{\cancel{2}}$.

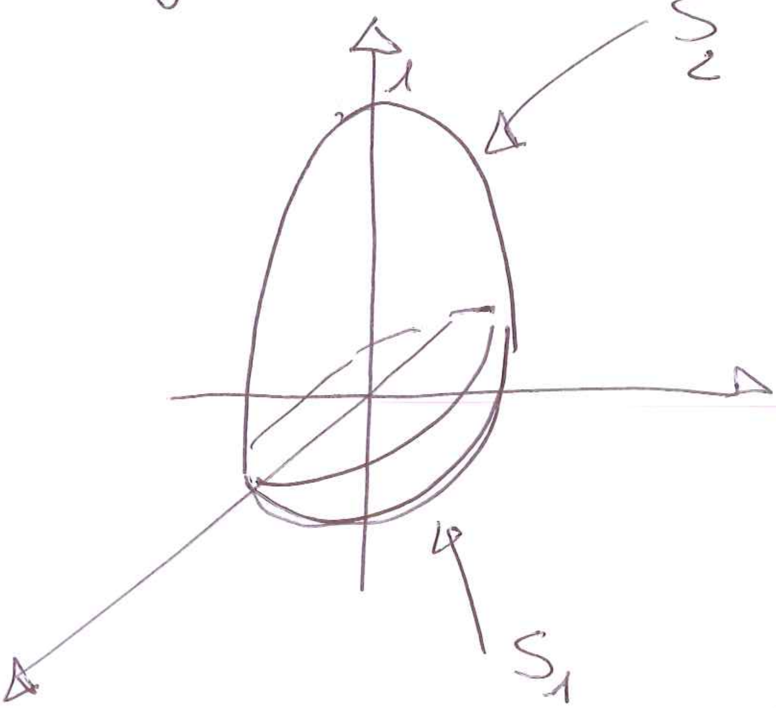
4) $\operatorname{div}\vec{F} = -3$

$\Rightarrow \underset{S_1 \cup S_2}{\Phi}(\vec{F}) = \iiint_E -3\,dx\,dy\,dz$

$= -3 \operatorname{vol} E$, dove E è il dominio di cui $S = S_1 \cup S_2$ è frontiera.

S_1: semisfera

S_2: paraboloide con vertice in $(0,0,1)$



$$\operatorname{vol} E = \iint_{D(x,y)} dx\,dy \left[1 - x^2 - y^2 - \left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \left\{ \rho \left[1-\rho^2 + \sqrt{1-\rho^2} \right] \right\}$$ (11)

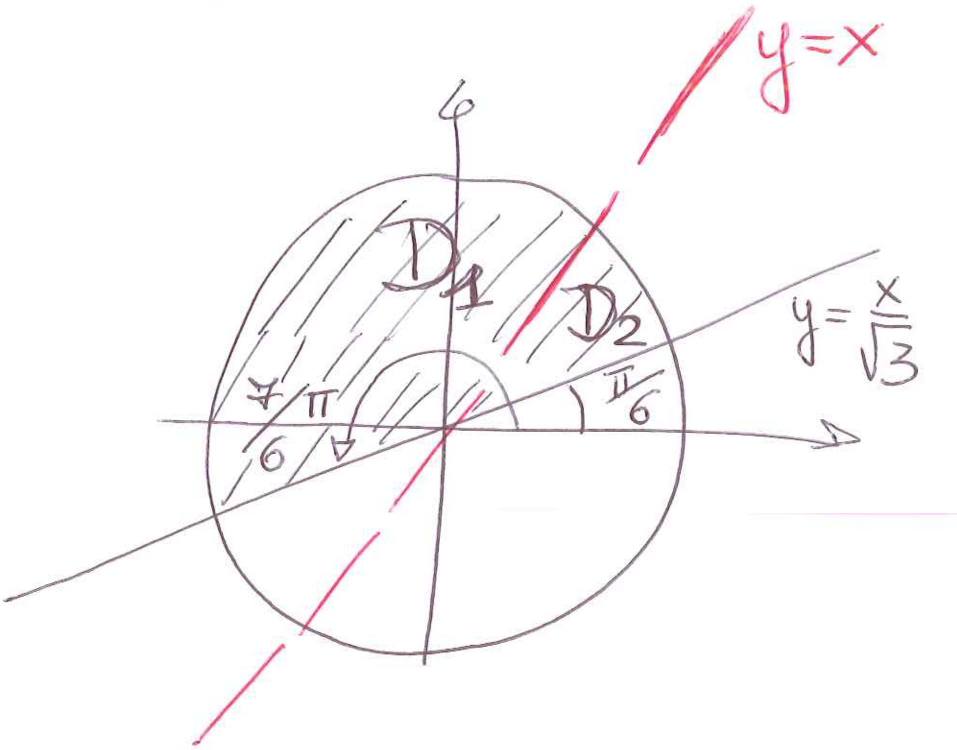
$$= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{6-3+4}{12} \right] = \frac{7}{6}\pi.$$

$$\Rightarrow \Phi_{S_1 \cup S_2} (\vec{F}) = -\frac{7}{2}\pi.$$

5) Dominio:

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ \sin\theta \ge \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{7}{6}\pi \end{cases}$$

$$f(x,y) = |x-y| = \begin{cases} x-y & \text{se} \quad y \le x \\ y-x & \text{se} \quad y > x \end{cases}$$

Spezziamo l'integrale in due parti: (12)

$$\iint_D |x-y|\,dx\,dy = \iint_{D_1} (y-x)\,dx\,dy$$

$$+ \iint_{D_2} (x-y)\,dx\,dy$$

$$\left[\begin{array}{l} D_2 = \left\{ 0 \le \rho \le 1 \,;\, \frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4} \right\} \\ D_1 = \left\{ 0 \le \rho \le 1 \,;\, \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{7}{6}\pi \right\} \end{array}\right]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{6}\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^2 (\sin\vartheta - \cos\vartheta)\,d\rho$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^1 \rho^2 (\cos\vartheta - \sin\vartheta)\,d\rho$$

$$= \Big[-\cos\vartheta - \sin\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{6}\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 + \Big[\sin\vartheta + \cos\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\sqrt{2}\right]=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

13

6) La forma può essere riscritta nel seguente modo:

$$\omega = \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z-1)^2-2}}$$

Essa è definita per $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2>2$ cioè all'esterno di una sfera di centro $C\equiv(-1,0,1)$ e di raggio $\sqrt{2}$.

Si verifica facilmente che i punti P_1 e P_2 sono esterni alla sfera, in quanto in essi ω è definita, così come in tutti i punti di $\overline{P_1P_2}$.

La forma NON è chiusa:

$$X_y = -\frac{1}{2}x\left[(x+1)^2+y^2+(z-1)^2-2\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y$$

$$\neq Y_x = -\frac{1}{2}y\left[(x+1)^2+y^2+(z-1)^2-2\right]2(x+1)$$

Occorre quindi ~~integrare~~ calcolare (14)
direttamente l'integrale sul segmento, che può essere parametrizzato nella forma:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = \int_0^1 \frac{3(1+t)}{\sqrt{3(1+t)^2 + \cancel{2(1+t)} - \cancel{2(1+t)}}}\, dt$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 \frac{(1+t)}{|1+t|}\, dt = \sqrt{3} \int_0^1 \frac{(1+t)}{(1+t)}\, dt = \sqrt{3}.$$