SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA MATEMATICA CTF - LT del 21/3/22.

1)
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & h \end{vmatrix} = 2h+1-2-(-2+1+2h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Dobbiamo pertanto stabilire la compatibilità del sistema.

$rg(A) = 2$, in quanto $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Orliamo M_2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & h & -1 \end{vmatrix} = -1+2h-1-2 = 2h-4$$

Pertanto

<u>se $h = 2$</u> $\quad rg(A) = rg(A_c) = 2$

$\Rightarrow \infty^1$ soluzioni

<u>Se $h \neq 2$</u> $\quad rg(A) < rg(A_c) = 3$

$\Rightarrow \nexists$ soluzioni.

Per $h=2$: (2)

$$\begin{cases} y-z=1-x \\ 2y+z=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y=1-3x \\ z=x+y-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x+\frac{1}{3} \\ z=x-x+\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\left(x, -x+\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad x\in\mathbb{R}.$$

2) Devo avere

$$\int_{1-k}^{1+k} \frac{1}{x}\,dx = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{x}>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow k<1}$$

$$\ln(|x|)\Big|_{1-k}^{1+k} = \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1+k}{1-k}=e \Rightarrow 1+k=e(1-k)$$

$$k=\frac{e-1}{e+1}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{1-k}^{1+k} \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \left[1+k-1+k \right]$$

$$= 2k = 2\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$$

3) $$y(x) = e^{\int_1^x dt} \left[\int_1^x e^{-\int_1^t ds} \left(\frac{1}{t}+t\right) e^t \, dt \right] \quad \boxed{x>0}$$

$$= e^{x-1} \left[\int_1^x e^{-t+1} \left(\frac{1}{t}+t\right) e^t \, dt \right]$$

$$= e^x \int_1^x \left(\frac{1}{t}+t\right) dt$$

$$= e^x \left[\ln(|t|) + \frac{t^2}{2} \right]_1^x$$

$$= e^x \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right].$$

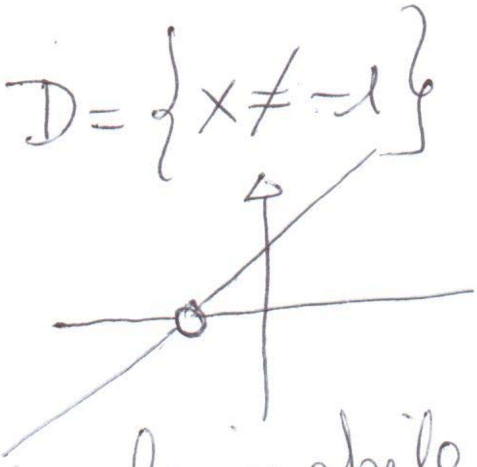
4) Moda $= 7$ cm

$m =$ Media $= 9$ cm.

Mediana $= 8,5$ cm

Varianza $= \sigma^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - m)^2 = \frac{11}{3} \cong 3,\overline{6}$

5) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}$ $\qquad D = \{x \neq -1\}$



$\forall x \in D \qquad f(x) = x+1$

In $x=-1$ c'è singolarità eliminabile,

perchè $\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = 0$

NO ASINTOTO VERTICALE

La funzione, $\forall x \in D$, è una retta, pertanto è asintoto di sé stessa. Quindi

ASINTOTO OBLIQUO $y = x+1$

per $x \to \pm\infty$

Ovviamente, $f(x) > 0 \quad \forall x > -1$

$f(x) < 0 \quad \forall x < -1.$

6) $f(x_0) = f(1) = 1 + 1 = 2$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = 3 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$\Rightarrow$ La retta tangente al grafico di f in $(1, 2)$ ha equazione

$$y = 2 + \frac{9}{2}(x-1)$$
$$= \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}.$$