SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA
MATEMATICA per CTF (LT)
del 14/6/2021

1) EDO a variabili separabili, oppure lineare omogenea.

Definita per $t^2 > 0 \Rightarrow t \neq 0$

Poiché $t_0 = 1 > 0 \Rightarrow$ studiamo il problema

in $(0, +\infty) \Rightarrow \log(t^2) = 2\log(|t|)$
$= 2\log t$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) - 2\log t\, y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\underline{y(t)} = e^{\int_1^t 2\log x\, dx} \left[1 + \cancel{\int_1^t e^{-\int_1^{x} 2\log s\, ds} \cdot 0\, dx} \right]$$

$$= e^{2\left[x\log x \Big|_1^t - \int_1^t x \frac{1}{x} dx \right]}$$

$$= e^{2\left[t\log t - \int_1^t dx \right]} = \left(e^{\log t}\right)^{2t} \cdot e^{-2(t-1)}$$

$$= \underline{t^{2t} \cdot e^{-2(t-1)}}$$

2) Il sistema ammette soluzioni se

$$\mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ k & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_i} = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 8 \\ k & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_c}$$

Calcoliamo $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ k & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} 6-2k \\ -2-2k \end{array}$

$\det = 4-4k \implies \begin{cases} =0 & \text{se } k=1 \\ \neq 0 & \text{se } k\neq 1 \quad (\mathrm{rg}=3) \end{cases}$

Poichè $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6+2=-4 \neq 0 \ \forall k$,

allora per $k=1$ $\mathrm{rg}(A_i)=2$

Ma per $k=1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4-8-24-4 \neq 0$$

$\implies$ per $k=1$ $\mathrm{rg}(A_i)=2 < \mathrm{rg}(A_c)=3$

$\implies$ NO SOL.

Per $k \neq 1$ $\quad rg(A_i) = rg(A_c) = 3$

$\Rightarrow$ per il Teo. di Cramer $\exists!$ soluzione

$\boxed{k=0}$:

$$\begin{cases} 2y+2z=8 \\ -y-3z=2 \\ -x-y+z=0 \end{cases}$$

sommando membro a membro le 3 equazioni,

$$-x=10 \Rightarrow x=-10$$

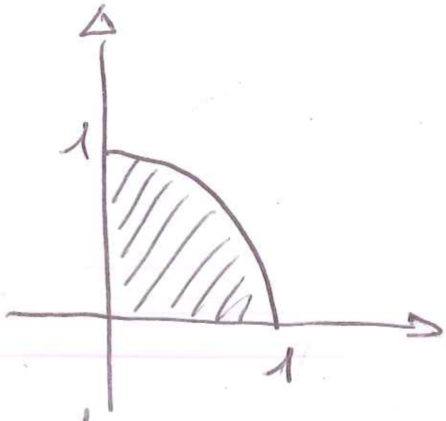
$$\Rightarrow \begin{cases} -y-3z=2 \\ -y+z=-10 \end{cases}$$ sottraendo

$$4z=-12 \Rightarrow z=-3 \Rightarrow$$

$$y=-3z-2=7$$

$\Rightarrow$ La sol. è $(-10, 7, -3)$.

3)



Si tratta di un'area.

$\Rightarrow I > 0.$

$$I = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (c)$$

4) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{1+x^3} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = -1$$

(b)

5) $$\log(x+1) + \log(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$$= \log\left[(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\right]$$

$$= \log(x^5+1) \qquad \text{(prodotto notevole)}$$

$$\Rightarrow \left[\log(x^5+1)\right]' = \frac{1}{x^5+1} 5x^4$$

(a)

Anche non ricordando il prodotto notevole, si può ugualmente arrivare al risultato, con un po' di algebra.

$$\left[\log(x+1)+\log(x^4-x^3+x^2-x+1)\right]' =$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{4x^3-3x^2+2x-1}{x^4-x^3+x^2-x+1} =$$

$$= \frac{x^4-x^3+x^2-x+1+(x+1)(4x^3-3x^2+2x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}$$

= (svolgendo i conti a numeratore e a denominatore)

$$= \frac{5x^4}{x^5+1}.$$

6) Voto mediano: i dati sono in numero pari $\Rightarrow \frac{v_{14}+v_{15}}{2} = \frac{22+25}{2} = 23,5$ (c)

Primo quartile: poiché il sesto dato è 19 $\Rightarrow 19$ (a).

N.B.: In Analisi, $\log x$ è IL LOGARITMO NATURALE, cioè $\log x = \log_e x$