SVOLGIMENTI PROVA DI ESONERO DI ANALISI 2 DEL 7/5/2026

$\boxed{\text{COMPITO A}}$

A$_1$

1) $D_C = \mathbb{R}$

N.B.: f_n funzione pari

$f_n(x) > 0$

$$f_n(0) = 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

$\forall x \neq 0$

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$D_{CP} = \cancel{[0,+\infty)}\ \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x\neq 0 \end{cases}$$

NO CONV. UNIF. in $\mathbb{R}$, perchè $f_n(x) \in C^0(\mathbb{R})$, ma $f(x) \notin C^0(\mathbb{R})$

In $(0,+\infty)$ (e, per simmetria, in $(-\infty,0)$):

$$\sup_{(0,+\infty)} |f_n - f| = \sup_{(0,+\infty)} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2+\frac{1}{n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$$

NO CONV. UNIF. in $\mathbb{R}-\{0\}$.

Con la derivata: $|f_n - f|' = f_n'(x) =$

$$\frac{2nx(n^2x^2+1)-(nx^2+2)2n^2x}{(n^2x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2n^3x^3}+2nx-\cancel{2n^3x^3}-4n^2x}{(n^2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2nx(1-2n)}{(n^2x^2+1)^2} = \underbrace{\frac{2n(1-2n)}{(n^2x^2+1)^2}}_{<0} x > 0 \iff x < 0$$

Pertanto f_n cresce in $(-\infty,0)$ e decresce in $(0,+\infty)$

Poniamoci in $[a,+\infty)$; $a>0$ (e, per ~~sup~~ simmetria, in $(-\infty,-a]$; $a>0$). (A2)

$$\sup_{[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a) = \frac{na^2+2}{n^2a^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{na^2}{n^2a^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\Rightarrow$ CONV. UNIFORME in ogni $[a,+\infty)$; $a>0$.

<u>SERIE ASSOCIATA</u>: $\forall x\neq 0$

$$f_n(x) \sim \frac{nx^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \sum \frac{f_n(x)}{n} \approx \sum \frac{1}{n^2} \text{ convergente}$$

La serie converge puntualmente (e assolutamente) in $\mathbb{R}-\{0\}$.

<u>CONV. TOTALE</u>: Per ogni $[a,+\infty)$; $a>0$

$$\sup_{[a,+\infty)} \frac{|f_n(x)|}{n} = \frac{f_n(a)}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum \sup_{[a,+\infty)} \frac{|f_n(x)|}{n} \approx \sum \frac{1}{n^2} \text{ convergente}$$

$\Rightarrow$ CONV. TOTALE in ogni $[a,+\infty)$; $a>0$.

N.B.: $f_n(0) = 2 \Rightarrow \frac{f_n(0)}{n} = \frac{2}{n}$

$$\Rightarrow \sum \frac{f_n(0)}{n} = 2\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

A3

2)

$$\left|f(x,y)\right| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \left|\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2 \cancel{|y|}}{\cancel{|y|}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Rightarrow f$ CONTINUA in $(0,0)$.

$$f(x,0)=f(0,y)=0 \Rightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

DER. DIREZIONALI:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\alpha^2 \operatorname{arctg}(\beta t)}{t\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)t^2}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\alpha^2\beta \cancel{t}}{\cancel{t}\,|t|}=\lim_{t\to 0}\alpha^2\beta|t|=0$$

DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\left(\frac{h^2 \operatorname{arctg} k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2 k}{h^2+k^2}\right|$$

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\cancel{h^2}|k|}{\cancel{h^2}}=0$$

$\Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE in $(0,0)$.

(In effetti, vale la formula del gradiente).

3)

A_4

$$\vec{r}\,'(t)=(1,2t,2t^2)\ ;\ \vec{r}\,''(t)=(0,2,4t)$$

Poiché $x'(t)=1>0$, allora la curva è sia semplice, sia regolare.

$$v(t)=\sqrt{1+4t^2+4t^4}=\sqrt{(1+2t^2)^2}=|1+2t^2|=1+2t^2$$

$$\ell(\gamma)=\int_0^1(1+2t^2)\,dt=\left[t+\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{5}{3}.$$

La curva non è piana, perché non esistono relazioni né lineari fra le componenti.
Si può verificare ciò anche direttamente.

$$\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&2t&2t^2\\0&2&4t\end{vmatrix}=(4t^2,-4t,2)$$
$$=2(2t^2,-2t,1)$$

$$\|\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''\|=\sqrt{4t^4+4t^2+1}\cdot 2=2\sqrt{(1+2t^2)^2}$$
$$=2(1+2t^2)$$

$$\Rightarrow\quad \hat{B}(t)=\frac{1}{1+2t^2}(2t^2,-2t,1)\quad \text{che non è costante.}$$

Altrimenti ancora: $\vec{r}\,'''(t)=(0,0,4)$

$$\vec{r}\,'\cdot(\vec{r}\,''\wedge\vec{r}\,''')=\vec{r}\,'''\cdot(\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,'')=\begin{vmatrix}0&0&4\\1&2t&2t^2\\0&2&4t\end{vmatrix}=8\neq 0$$

da cui $\tau \neq 0$.

Per la curvatura:

$$k(t) = \frac{2(1+2t^2)}{(1+2t^2)^3} = \frac{2}{(1+2t^2)^2} > 0$$

Poiché k è il reciproco di una funzione positiva crescente su $t \geq 0$, allora è decrescente.

Pertanto

$$\max_{[0,+\infty)} k(t) = k(0) = 2$$

Inoltre $\lim_{t \to +\infty} k(t) = 0 \Rightarrow \inf_{[0,+\infty)} k(t) = 0$

$\nexists$ minimo in $[0,+\infty)$.