COMPITO B

B_1

1) $D_C=\mathbb{R}$

N.B.: f_n funzione pari

$f_n(x)>0$

$$f_n(0)=\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}$$

$$\forall x\neq 0 \qquad f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{nx^2}{n^2x^2}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

$D_{CP}=\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } x=0\\ 0 & \text{se } x\neq 0\end{cases}$$

NO CONV. UNIF. in $\mathbb{R}$, perché $f_n\in C^0(\mathbb{R})$, ma $f\notin C^0(\mathbb{R})$.

In $(0,+\infty)$ (e, per simmetria, in $(-\infty,0)$):

$$\sup_{(0,+\infty)}|f_n-f|=\sup_{(0,+\infty)}f_n(x)\geq f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1+\frac{1}{n}}{3}\underset{n\to+\infty}{\not\to}0$$

NO CONV. UNIF. in $\mathbb{R}-\{0\}$.

Con la derivata: $|f_n-f|'=f_n'(x)=$

$$\frac{2nx(n^2x^2+2)-2n^2x(nx^2+1)}{(n^2x^2+2)^2}=\frac{\cancel{2n^3x^3}+4nx-\cancel{2n^3x^3}-2n^2x}{(n^2x^2+2)^2}$$

$$=\underbrace{\frac{2n}{(n^2x^2+2)^2}}_{>0}(2-n)\,x>0 \iff x<0.$$

Pertanto f_n cresce in $(-\infty, 0)$ e decresce in $(0, +\infty)$.

Poniamoci in $[a, +\infty)$; $a>0$ (e, per simmetria, in $(-\infty, -a]$; $a>0$).

B2

$$\sup_{[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a) = \frac{na^2+1}{n^2a^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{na^2}{n^2a^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ CONV. UNIFORME in ogni $[a, +\infty)$; $a>0$.

SERIE ASSOCIATA: $\forall x \neq 0$

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{f_n(x)}{n} \approx \sum \frac{1}{n^2}$$

CONVERGENTE

La serie converge puntualmente (e assolutamente) in $\mathbb{R} - \{0\}$.

CONV. TOTALE: Per ogni $[a, +\infty)$; $a>0$

$$\sup_{[a,+\infty)} \frac{|f_n(x)|}{n} = \frac{f_n(a)}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum \sup_{[a,+\infty)} \frac{|f_n(x)|}{n} \approx \sum \frac{1}{n^2}$$

CONVERGENTE

$\Rightarrow$ CONV. TOTALE in ogni $[a, +\infty)$; $a>0$.

N.B.: $f_n(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{f_n(0)}{n} = \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \sum \frac{f_n(0)}{n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

2)

B3

$$|f(x,y)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \left|\frac{y^2 x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{y^2\cancel{|x|}}{\cancel{|x|}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Rightarrow f$ CONTINUA in $(0,0)$.

$f(x,0) = f(0,y) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

DER. DIREZIONALI:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\beta^2(e^{\alpha t}-1)}{t\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\beta^2\alpha\cancel{t}}{\cancel{t}|t|}$$

$$= \lim_{t\to 0} |t|\beta^2\alpha = 0$$

DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \left(\frac{k^2(e^h-1)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{k^2 h}{(h^2+k^2)}\right| \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\cancel{k^2} h|}{|\cancel{k^2}|} = 0$$

$\Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE in $(0,0)$.

(In effetti, vale la formula del gradiente).

3) $\vec{r}'(t)=(2t^2,1,2t)$; $\vec{r}''(t)=(4t,0,2)$ B_4

Poiché $y'(t)=1>0$, allora la curva è sia semplice, sia regolare.

$$v(t)=\sqrt{4t^4+1+4t^2}=\sqrt{(2t^2+1)^2}=|2t^2+1|=2t^2+1$$

$$\ell(\gamma)=\int_0^1(2t^2+1)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1=\frac{5}{3}.$$

La curva non è piana, perché non esistono relazioni né lineari fra le componenti.

Si può verificare ciò anche direttamente:

$$\vec{r}'\wedge\vec{r}''=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2t^2&1&2t\\4t&0&2\end{vmatrix}=(2,4t^2,-4t)$$

$$=2(1,2t^2,-2t)$$

$$\|\vec{r}'\wedge\vec{r}''\|=\cancel{\sqrt{}}\,2\sqrt{1+4t^4+4t^2}=2(1+2t^2)$$

$$\Rightarrow\hat{B}(t)=\frac{1}{\cancel{}(1+2t^2)}(1,2t^2,-2t)$$ che non è costante.

Altrimenti ancora: $\vec{r}'''(t)=(4,0,0)$

$$\vec{r}'\cdot(\vec{r}''\wedge\vec{r}''')=\vec{r}'''\cdot(\vec{r}'\wedge\vec{r}'')=\begin{vmatrix}4&0&0\\2t^2&1&2t\\4t&0&2\end{vmatrix}=8\neq0$$

da cui $\tau\neq0$.

Per la curvatura:

$$k(t) = \frac{2(1+2t^2)}{(1+2t^2)^3} = \frac{2}{(1+2t^2)^2} > 0$$

B_5

Poichè k è il reciproco di una funzione positiva crescente in $t \geq 0$, allora è decrescente.

Pertanto $\max\limits_{[0,+\infty)} k(t) = k(0) = 2$.

Inoltre $\lim\limits_{t \to +\infty} k(t) = 0 \Rightarrow \inf\limits_{[0,+\infty)} k(t) = 0$

$\nexists$ minimo in $[0, +\infty)$.