Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Simulazione di Esame

Esercizio 1. Siano a_n, b_n due successioni di numeri reali positivi e tali che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ per $n \to +\infty$. Indicare l'affermazione corretta, motivando la risposta.
a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge.
b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ converge.
c) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
d) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Esercizio 2. a) Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Si definisca

$$g_\lambda(x) := f(x) - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Denotiamo con $R(f)$ l'insieme di tutti $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{1}{g_\lambda}$ è ancora una funzione continua da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ (tale insieme si chiama *risolvente* di f). Mostrare che l'insieme $\sigma(f) := \mathbb{R} - R(f)$ (detto *spettro* di f) coincide con $f([a, b])$, l'immagine di $[a, b]$ tramite f.
b) Dimostrare che esiste una unica soluzione dell'equazione

$$(\arctan x)e^{x^2-1} = C,$$

per ogni $C \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia $a \geq 1$. Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + P(x)} \leq a$$

dove $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ è un polinomio a coefficienti positivi.

Esercizio 4. Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0, 0)$ della seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2 y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 5. Studiare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = xe^{y-x} - y$ nell'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Tale funzione è limitata superiormente e/o inferiormente?

Esercizio 6. a) Enunciare il Teorema di Lagrange per funzioni di una variabile.
b) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{x - 1}e^x.$$

Esercizio 7. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{\pi}{2}.$$