Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Primo Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq 1\};\ B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\};\ C = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 \geq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 < 0\};$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : 13 - 2x > -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}.$$

Calcolare

a) $A \cap B$ e $A \cup B$;

b)$A \cap C \cap B$;

c) $D \cup E$ e $D \cap E$;

d) $A \triangle D$ e $B \triangle E$.

Esercizio 2. Sia A l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \leq 0.$$

Scrivere, se è possibile, A come unione disgiunta di suoi sottoinsiemi.

Ripetere l'esercizio per l'insieme B delle soluzioni della disequazione:

$$\frac{x-1}{x-3} < \frac{x+3}{x+1}.$$

Esercizio 3. (*La topologia di* $\mathbb{R}$). Ricordiamo che un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme della forma

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

con $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R} \cap \{+\infty, -\infty\}$. Denotiamo con $\mathcal{T}$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono unione arbitraria di sottoinsiemi che possono scriversi come intersezioni finite di intervalli aperti. In altre parole $A \in \mathcal{T}$ se e solo se $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ dove Λ è un insieme di indici e $A_\lambda = \bigcap_{j=1}^{n_\lambda} I_j^\lambda$, con $n_\lambda \in \mathbb{N}$ e I_j^λ intervallo aperto per ogni $j = 1, ..., n_\lambda$ e $\lambda \in \Lambda$. Mostrare che:

a) $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{T}$;

b) se $A, B \in \mathcal{T}$ allora $A \cap B \in \mathcal{T}$;

c) se $\{A_i\}_{i \in I}$, dove I è un insieme di indici qualsiasi, è una sottofamiglia di $\mathcal{T}$ allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Usando il principio di induzione provare che se vale b), allora $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$ per ogni scelta di $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{T}$.

Esercizio 4. Denotiamo con E il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito nel modo seguente:

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Calcolare $\sup E$ e $\inf E$ motivando la risposta e specificando se sono massimo e minimo per E rispettivamente.

b) Trovare un maggiorante ed un minorante per E.

Esercizio 5. Ripetere l'esercizio precedente con E definito come segue:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se facciamo variare n in $\mathbb{Q}$ quale insieme otteniamo? Dimostrare che se definiamo

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

allora $F \subset E$. Vale anche l'inclusione inversa?

Esercizio 6. Dimostrare che se $n \leq m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, allora

$$\frac{m+1}{m} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Esercizio 7. Sia $n \in \mathbb{N}$ e denotiamo con S_n la somma dei primi n numeri naturali. Dimostrare che

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

usando il principio di induzione.

Esercizio 8. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Diremo che E è limitato se esiste un numero reale $M > 0$ tale che $|x| \leq M$, per ogni $x \in E$.

a) Se a lezione è stata data una definizione diversa, allora mostrare che essa è equivalente a quella appena data (cosa significa mostrare che due definizioni sono equivalenti?), altrimenti passare al punto b).

b) Mostrare che un sottoinsieme E è limitato se e solo se ammette maggiorante e minorante.

c) Dire quali intervalli di $\mathbb{R}$ sono limitati e quali non lo sono.

Esercizio 9. Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito nel seguente modo:

$$E = \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Calcolare $\sup E$ e $\inf E$, se esistono, giustificando la risposta e specificando se sono massimi o minimi rispettivamente.

Esercizio 10. Mostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ la seguente disuguaglianza è vera:

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}.$$

Esercizio 11. Mostrare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Esercizio 12. Siano E, F due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che $x \leq y$, per ogni $x \in E$ e $y \in F$. Mostrare che $\sup E \leq \sup F$.

Esercizio 13. Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se esiste un numero reale M tale che $x \leq M$, per ogni $x \in E$.

a) Dare la definizione di insieme limitato inferiormente. b) Mostrare che se A è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato superiormente allora A ammette massimo. b) Mostrare che ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ ammette massimo e minimo.

Esercizio 14. Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice aperto se per ogni $x_0 \in A$ esiste un intervallo aperto (a, b) tale che $x \in (a, b) \subset A$. Mostrare che un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è aperto se e solo se $A \in \mathcal{T}$, dove $\mathcal{T}$ è la famiglia definita nell'esercizio 3.