Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Undicesimo Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Calcolare (e disegnare quando possibile) i domini delle seguenti funzioni di due variabili.

$$a)\ z = x\ln\frac{x}{y};\ \ b)\ z = \ln\frac{x}{y} + \ln\frac{y}{x};\ \ c)\ z = \sin\frac{x}{y} + \cos\frac{y}{x};\ \ d)\ z = \ln(\ln x);\ \ e)\ z = \sqrt{xy^2};$$

$$f)\ z = \sqrt{x^2+y^2-1};\ \ g)\ z = \sqrt{x^2-y^2};\ \ h)\ z = \sqrt{x\sqrt{y}};\ \ i)\ z = \sqrt{x\sin y};\ \ z = \tan\left(x^2-y\right);$$

$$l)\ z = \frac{1}{\sin(x+y)};\ \ m)\ z = \frac{x+y}{x^2+y^2};\ \ n)\ z = \frac{x+1}{x-y};\ \ o)\ z = \frac{xy}{x^2+y^2-1};\ \ p)\ z = \frac{e^{x+y}}{\ln(x^2+y^2)-1}.$$

Esercizio 2. Posto $r := \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dimostrare che

$$a)\ |x^n y^m| \le r^{m+n};\ \ b)\ |x|^m + |y|^m \ge Cr^m$$

per una opportuna costante $C > 0$ e per ogni $n, m \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Studiare l'insieme di definizione, continuià, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni di due variabili.

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$d)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^7-y^7+x^6y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$e)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^4+2y^4\right)}{x^2+3y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f)\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x-y)}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$h)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$i)\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2-1)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right) & \text{se } (x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$l)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 \sin y^2}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$m)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$n)\ f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$o)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$p)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sin^2 x+\sin^2 y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$q)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$r)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\left(e^{x^2}-1\right)\left(e^{y^2}-1\right)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 4. Una successione di punti del piano P_n converge ad un certo $P \in \mathbb{R}^2$ se e solo se da ogni sua sottosuccessione si può estrarre una sottosuccessione convergente ad P.

Esercizio 5. Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ ossia se esiste una costante A ed una funzione $\omega(h)$ tale che

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = \omega(0) = 0,$$

per cui

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + \omega(h)h.$$

Esercizio 6. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato e non vuoto. Sia $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su $\overline{A}$, differenziabile su $\overline{A}$ e costante su ∂A. Mostrare che esiste un punto $(x_0, y_0) \in A$ in cui il differenziale di f si annulla (Teorema di Rolle in $\mathbb{R}^2$).

Esercizio 7. Calcolare i punti stazionari delle seguenti funzioni e dire se sono punti di massimo, minimo o sella utilizzando la matrice Hessiana.

$$a)\ z = x(x+y)e^{x-y};\ \ b)\ z = \cos x + \cos y + \cos(x+y);\ \ c)\ z = y^2 - x^3;\ \ d)\ z = \cos(x+y) + \cos(x-y);$$

$$e)\ z = y^2 + x^2y + x^4;\ \ f)\ z = (x-2)^2 + (x-y)^4;\ \ g)\ z = x^2 + xy^3 + 1;\ \ h)\ z = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y};$$

$$i)\ z = (x+y)^2 - (x+5y+xy);\ \ l)\ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2};\ \ m)\ z = xy(a-x-y)^2,\ a \in \mathbb{R};\ \ n)\ z = (6-x-y)x^2y^3;$$

$$o)\ z = (5x+7y-25)e^{-(x^2+y^2+xy)};\ \ p)\ z = x^3 + y^3 - 3axy,\ \ a \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8. Calcolare, se esistono, massimi e minimi della funzione $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$ nell'insieme

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, \;\; y = t+1, \;\; t \in [0,1]\}$$

.

Esercizio 9. Calcolare, se esistono, massimi e minimi della funzione $f(x,y) = e^{x+y}$ lungo la curva $\alpha(t) = (t, \ln t)$, definita per $t > 0$.

Esercizio 10. Calcolare, se esistono, massimi e minimi delle seguenti funzioni.
a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ nell'insieme $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], y \in [-1,1]\}$.
b) $f(x,y) = (x+y)e^{x+y}$ nell'insieme $B := A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$.
c) $f(x,y) = \frac{x+2y}{x}$ nell'insieme $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 + 1, y \leq 4\}$.