Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Secondo Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Sia $q > 1$ un numero reale. Dimostrare che la successione $a_n := q^n$ non è limitata superiormente.

Esercizio 2. Dimostrare la validità del seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) = 0$$

per ogni successione a_n infinitesima (cioè tale che $a_n \to \infty$ per $n \to \infty$). Dedurre che se $b_n \to l \in \mathbb{R}$ allora che $\sin(b_n) \to \sin(l)$, per $n \to \infty$.

Esercizio 3. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1.$$

Esercizio 4. Dimostrare che se $a > 0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[-n]{a} = 1.$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a^n$$

quando $|a| \leq 1$, $a < -1$ e $a > 1$.

Esercizio 6. Dimostrare che se $a > 0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Cosa succede per $a \leq 0$?

Esercizio 7. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$$

quando $|a| \leq 1$, $a < -1$ e $a > 1$.

Esercizio 8. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k}$$

quando $|a| \leq 1$, $a < -1$ e $a > 1$.

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-1}; \quad \lim_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right); \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\sqrt{n};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^2}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-\sin(n)}{n^2+n}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}\sin(n!); \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n^2+n};\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)};\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-n^2-1}-\sqrt{n^3-n^2+n}}{n-\sqrt{n^2-n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{5}{n}\right);\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5};\ \lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1)\sin(\frac{1}{n})}{n^2};\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+4}{n}-\frac{n^4+3n}{n-2}\right);\ \lim_{n\to\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}};\ \lim_{n\to\infty}\binom{2n}{n};\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n};\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^6+1};\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^5+1};\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n-3^n};\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-n\sqrt{n-1})\sqrt{n^3+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!};\ \lim_{n\to\infty}(1+(-1)^n);\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{2n};\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)};\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{\sin(a_n)},\ \textit{con}\ a_n\to 0;$$

Esercizio 10. Siano

$$p(n)=a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0,\quad q(n)=n_hn^h+b_{h-1}n^{h-1}+\cdots+b_1n+b_0$$

due polinomi nella variabile $n\in\mathbb{N}$ di grado rispettivamente $k,h\in\mathbb{N}$. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$$

al variare di $k,h\in\mathbb{N}$. Calcolare poi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[\alpha]{p(n)}}{\sqrt[\beta]{q(n)}}$$

al variare di $h,k,\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.

Esercizio 11. Provare che

$$a_n\to l\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to l.$$

Esercizio 12. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=l\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=l.$$

Esercizio 11. Trovare il minimo valore di $A\in\mathbb{R}$ per il quale

$$\ln(|\sin(x)|+A)\geq\cos(x)$$

risulta essere vera per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Esercizio 12. Siano a_n,b_n due successioni asintotiche. È sempre vero che anche e^{a_n},e^{b_n} sono anche esse asintotiche?