Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Terzo Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Studiare il dominio delle seguenti funzioni razionali.

$$y=\frac{x}{x-1};\ y=\frac{x^4-11}{1-\frac{1}{x}};\ y=\frac{2+\frac{1}{x}}{x^4+3x^2-4};\ y=\frac{x^3-1}{x};\ y=\frac{x}{x^3-1}.$$

Esercizio 2. Studiare il dominio delle seguenti funzioni irrazionali.

$$y=\sqrt{x^2-1};\ y=\sqrt{\frac{2x-1}{3x-5}};\ y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}};\ y=\frac{\sqrt{x^3-1}}{1-\sqrt{x^2-1}};\ y=\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

Esercizio 3. Studiare il dominio delle seguenti funzioni logaritmiche.

$$y=\ln\left(x^2-3x+2\right);\ y=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right);\ \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2+1}\right);\ y=\ln\left(3-\sin(x)\right);\ y=\ln\left(1-\sin(x)\right);$$

$$y=\frac{\ln\left(x^2-5x+6\right)}{\ln\left(x^2+1\right)};\ y=\ln(x)-\frac{x}{\ln\left(\sin(x)\right)};\ y=\ln\left(\ln\left(x^2-3\right)\right);$$

$$y=\frac{\ln(x)}{x^3-1};\ y=\frac{x}{\ln^2(x)-6\ln(x)+8}.$$

Esercizio 4. Dare un esempio di funzione definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con esattamente due punti.

Esercizio 5. Dati due sottoinsiemi $A, B\subset\mathbb{R}$, dimostrare che una funzione $f : A\to B$ è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva simultaneamente.

Esercizio 6. Sia $f : A\to B$, con $A, B\subset\mathbb{R}$, una funzione. Mostrare che se f è strettamente monotona allora è anche iniettiva. Vale anche il viceversa?

Esercizio 7. Dare un esempio di funzione reale di variabile reale che sia definita su tutti numeri reali non interi.

Esercizio 8. Dare un esempio di funzione reale di variabile reale definita solo su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 9. Dare un esempio di funzione reale di variabile reale il cui insieme di zeri ha la cardinalità del numerabile. Può esistere una funzione il cui insieme degli zeri ha cardinalità del continuo?

Esercizio 10. Studiare il dominio delle seguenti funzioni.

$$y=\frac{e^{x^5}}{e^{\frac{x-1}{x+2}}-1};\ y=e^{\sqrt{\ln(x^2-1)-1}}-1;\ y=\ln\left(e^{x-1}-1\right);\ y=\sqrt{e^{\frac{x^2+1}{x}}+1};\ y=(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x-\ln(x)}};$$

$$y=\sqrt{e^{\frac{x^2-3}{x}}-e};\ y=\frac{x}{\cos(x)}-\frac{x+1}{\cos(x)-\sin(x)};\ y=\sqrt{\cos(x)\sin(x)};\ y=\sqrt{2\cos(x)\sin(x)-1};$$

$$y=\frac{x}{\sin(\cos(x))};\ y=\frac{\sin(x^2-1)}{x(e^{2x}-7e^x+10)};\ y=\sqrt[3]{\frac{x}{\ln(x^2-x+e)-1}};\ y=\sqrt[4]{e^{x^2-2x+2}-e};$$

$$y = \sqrt{|x-3| - |x+4|};\ \ y = \pi^{\frac{x}{|x-2|}};\ \ y = \frac{x}{e - e^{\frac{1}{x}}};\ \ y = \sqrt{x|x|+1};\ \ y = \sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)};\ \ y = \ln(|x| - 2|x-1|);$$

$$y = \sqrt{\frac{|x| - |x+1|}{2} - 1};\ \ y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}};\ \ y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}};\ \ y = \arccos\left(\frac{x-3}{x+1}\right);\ \ y = \sqrt{\arctan\left(\frac{x+2}{x}\right)};$$

$$y = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln(1-x^2);\ \ y = e^{\sqrt{\ln(1+x)}};\ \ y = \arccos\left(1 - \frac{x^2-1}{x}\right).$$

Esercizio 11. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni.

$$y = |x+1|;\ \ y = \frac{x+|x|}{2};\ \ y = \frac{|x|-x}{2};\ \ y = \max(\sin(x), \cos(x)).$$

Esercizio 12. Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T \in \mathbb{R}$ se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1. Mostrare che se f ha periodo T allora $g(x) := f(kx+h)$ ha periodo $\frac{T}{k}$, con $k \neq 0, h \in \mathbb{R}$.
2. Mostrare che se f ha periodo minimo T e g ha periodo minimo S tali che $\frac{T}{S} \in \mathbb{Q}$, allora $h(x) := f(x) + g(x)$ è periodica.
3. Mostrare che se f ha due periodi T, S, allora ha anche periodi $kT + hS$, con $h, k \in \mathbb{Z}$.