Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Quarto Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Stabilire il carattere delle seguenti serie a termini positivi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(2))^n}{2n+\frac{3}{2}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+1}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n^2+1\right)}{n^3+10n^3+n+1}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}-1\right)}.$$

Esercizio 2. Stabilire il carattere delle seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^\alpha}{(2n)!}\alpha^{3n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2-\alpha}}{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3\left(7^{\alpha+2}\right)^n}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left((2\ln(n))^{\alpha-7}\right)^n}{n^2}.$$

Esercizio 3. Stabilire il carattere delle seguenti serie al variare del parametro reale $\alpha > 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) n^{1-\alpha}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1\right) n^{2-\alpha};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)^\alpha\right) n^4.$$

Esercizio 4. Sia a_n il termine generale di una serie a termini positivi convergente. Dimostrare che anche la serie di termine generale a_n^2 è convergente.

Esercizio 5. Sia $a_n \geq 0$ il termine generale di una serie tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

converga. Allora la serie di termine generale $\frac{a_n}{n}$ converge.

Esercizio 6. Studiare la convergenza assoluta e semplice delle seguenti serie, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (quando presente).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^4+n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\alpha^n}{n^2+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\alpha^n}{n!};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right); \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}.$$

Esercizio 7. Siano a_n, b_n i termini generali di due serie tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

siano convergenti. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

converge.

Esercizio 9. Provare che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n \neq -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, converge assolutamente allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge assolutamente.

Esercizio 10. Dire se convergono le seguenti serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n+2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Esercizio 11. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln(x^n); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+n|x|^n\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(x^n)}{n+x^{2n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^n}}{x^n};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n} x^{2n+1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{1+n^3x^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$