

Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Quinto Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Calcolare il coniugato ed il modulo dei seguenti numeri complessi.

$$\frac{1-3i}{1+i}; \frac{1+i}{1-i}; \frac{2-3i}{1-i}; 1+i - \frac{i}{1-2i}; \frac{1}{1-i} + \frac{2}{i-1}; \frac{3-i}{(1+i)^2} - \frac{1}{1-i}.$$

Esercizio 2. Descrivere l'insieme dei numeri complessi per cui:

$$|z - (1-i)| = 2; (1-i)z - (1+i)\bar{z} = i; |z| \leq |z+i|.$$

Esercizio 3. Scrivere la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi

$$1-i; 1+i; 1+i\sqrt{3}; 1+i; i; -1; \frac{1+i}{1-i}; i(1+i); \frac{1}{3+3i};$$

$$(1-i)(2-2i); \frac{4i}{\sqrt{3}+i}; \frac{i(i-1)}{(1+i)^2};$$

Esercizio 4. Calcolare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1-i)^n = 8(1+i);$$

verificare inoltre che

$$|z - z'| = \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)},$$

con $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $z' = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Esercizio 5. Si consideri la seguente applicazione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = \frac{x-i}{x+i}, x \in \mathbb{R}.$$

Mostrare che f è biettiva da \mathbb{R} in $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} - \{1\}$.

Esercizio 6. Risolvere le seguenti equazioni.

$$(z+i)^2 = (\sqrt{3}+i)^3; z^6 + z^3 + 1 = 0; z^3 = |z|^2; z^2 + i\bar{z} = 1; z^2 + i\sqrt{3}z + 6 = 0;$$

$$z^2 + i\sqrt{5}|z| + 6 = 0; |z|^2 + 5z + 10i = 0.$$

Esercizio 7. Verificare che se $|z|=1$ allora anche il numero complesso

$$\frac{3z-1}{3z+i}$$

ha modulo 1.

Esercizio 8. Calcolare i seguenti numeri complessi

$$\sqrt[7]{(-1+i\sqrt{3})^7}; \sqrt[4]{3-3i}; i^{223}; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{327}; \sqrt[7]{(-\sqrt{3}+i)^7}; \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{112};$$

Esercizio 9. Ricordando che $\text{Log}(z) := \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, dove $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, calcolare $\text{Log}(z)$ per tutti i numeri complessi z dei precedenti esercizi 1 e 3.