Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Sesto Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Studiare la continuità della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. Premettiamo che una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dove I è un intervallo aperto, si dice *semicontinua inferiormente* [*semicontinua superiormente*] in $x_0 \in I$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ [$f(x) < f(x_0) - \varepsilon$] ogni volta che $|x - x_0| < \delta$. Dimostrare che una funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I$ se e solo se è semicontinua inferiormente e superiormente. Dimostrare poi che se f è semicontinua superiormente allora $-f$ è semicontinua inferiormente.

Esercizio 3. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica, di periodo $T > 0$, se $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
a) Supponiamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, periodica e non costante e si ponga

$$\tau := \inf\{T \in \mathbb{R} : T > 0 \text{ è un periodo per } f\}.$$

Dimostrare che $\tau > 0$ e che è un periodo di f (detto il *periodo* di f).
b) Trovare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periodica, non continua e tale che, posto τ come sopra, risulti $\tau = 0$.
c) Se τ è il periodo di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e non costante, e $T > 0$ è un periodo di f, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $T = n\tau$.

Esercizio 4. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Dimostrare che i punti di discontinuità di f formano un insieme al più numerabile.

Esercizio 5. Determinare i punti di discontinuità della seguente funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] - \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{se } x = 0; \\ \frac{1}{p+q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{N} \text{ primi tra loro.} \end{cases}$$

Esercizio 6. Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, con $I = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, una funzione continua e tale che

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty.$$

Provare che f è superiormente limitata e dotata di massimo.

Esercizio 7. Sia $y = P(x)$ una funzione polinomiale di grado dispari. Dimostrare che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$. Discutere in modo dettagliato il caso in cui si ha una funzione polinomiale di grado 3. Per i polinomi di grado pari valgono le stesse conclusioni?

Esercizio 8. Sia $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una funzione continua. Dimostrare che esiste $\xi \in [0,1]$ tale che $f(\xi) = \xi$.

Esercizio 9. Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e biiettiva su sull'intervallo I. Dimostrare che f è strettamente monotona. Trovare un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ invertibile ma non monotona in nessun intervallo.

Esercizio 10. Sia I un intervallo chiuso e limitato. Una funzione $f : I \longrightarrow I$ si dice *lipschitziana* se esiste una costante $K > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ per ogni $x, y \in I$. Dimostrare che f è continua e che esiste $\xi \in I$ tale che $f(\xi) = \xi$.

Esercizio 11. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^p-1}{x^q-1}, \quad p,q \in \mathbb{N}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}; \quad \lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\sin^2 x}; \quad \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})x;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+\sin(x^2)}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2+\sin(x^2)}; \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right); \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(2x)}{1-\cos x}; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x}; \quad \lim_{x\to +\infty} (2x - \sqrt{4x^2+x}); \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x+x^2}; \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}, \quad x \in \mathbb{R}; \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}, \quad x > 0; \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \quad x \geq 0;$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^8 \ln(1+e^{4x})}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2}; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x - \cos x}{x+e^x}; \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2 \ln x \sin(x-3)}{(5x+1)[e^{x-3}-1]}; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^5 - x^3 + e^x - 2x}{e^x - 1 + \frac{1}{4}x - x^2};$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x\sin x + 1}{x^2} \ln x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x\sin x + 1}{x^2} \ln x; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}{x};$$

Esercizio 12. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, calcolare il seguente limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}.$$

Esercizio 13. Discutere la continuità delle seguenti funzioni.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 - 3 & \text{se } x > 2, \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{\ln(x^2+1)} & \text{se } x > 0 \\ \frac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio 14. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

quando

$$a) \ f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x + 2x}{e^{3x}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

$$b) \ f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2+\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{x^3+1}{(x-3)^2} & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Esercizio 15. Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue.

$$a) \ f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 & \text{se } x \ne 0. \end{cases}$$

$$b) \ f(x) = \begin{cases} -(x+\alpha)^2 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1-e^{x^3}}{\sin^3 x} & \text{se } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

$$c) \ f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin^2 x}-1}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

$$d) \ f(x) = \begin{cases} x^\alpha (e^{x^3} - 1) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 16. Calcolare massimo e minimo assoluti, se esistono, della funzione $f(x) = x + |\cos x|$ per $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Esercizio 17. Calcolare massimo e minimo assoluti, se esistono, della seguente funzione.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ \cos x & \text{se } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Esercizio 18. Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \in [0, 1] \\ \ln x & \text{se } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Dimostrare che f è una funzione continua che non ha massimo assoluto ma un minimo assoluto.