Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Settimo Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$. Mostrare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Esercizio 2. Ricordiamo che una funzione $f(x)$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$, mentre si dice *dispari* se $f(-x) = -f(x)$. Mostrare che se $f : (-a,a) \longrightarrow \mathbb{R}$ è pari e derivabile in 0 allora $f'(0) = 0$. Mostrare poi che la derivata di una funzione derivabile pari è dispari, mentre la derivata di una funzione derivabile dispari è pari.

Esercizio 3. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$|f(x) - f(y)| < K|x-y|^n \text{ con } n \in \mathbb{N}, n > 1 \text{ e } K > 0.$$

Mostrare che f è derivabile in $[a,b]$ e si ha $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Cosa si può dire della derivata seconda?

Esercizio 4. Mostrare che la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è derivabile per $x = 0$, mentre la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile per $x = 0$. Verificare se quest'ultima è derivabile una seconda volta nello stesso punto.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c, \end{cases}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia derivabile per $x = c$. Discutere questo esercizio anche per la derivata seconda.

Esercizio 6. Calcolare massimi e minimi (assoluti e relativi) delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi indicati.

$$y = x^3 - x, \;\; x \in [-2;2]; \;\; y = \arctan(x^2 - 4x + 1), \;\; x \in \mathbb{R}; \;\; y = x + \ln x, \;\; x \in [1,2].$$

Esercizio 7. Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico.

$$y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-9x+20};\ \ y = \frac{x^2+1}{x-1};\ \ y = \frac{3-2x}{x^2-1};\ \ y = \frac{x^2}{x^2+2};;\ \ y = \frac{x^2-6x+8}{2x};$$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}};\ \ y = \sqrt{1-x^2};\ \ y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2};\ \ y = \frac{x^2-2}{\sqrt{x-1}};\ \ y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}};$$

$$y = (x^2-5)e^{3x-1};\ \ y = x^2+2-\ln(x);\ \ y = \frac{e^{x^2-3x+1}}{x^2+1};\ \ y = \frac{e^x-1}{x};\ \ y = x\ln(x+1);$$

$$y = \frac{|x^2-1|}{x};\ \ y = |x|\ln(x^2-4);\ \ y = |e^{x^2-1}-1|;\ \ y = \frac{x^2-3|x|+2}{|x|};\ \ y = \frac{x^2-x}{1-|x|}.$$

Esercizio 8. Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni.

$$x + e^x = 0;\ \ x^3 - 9x^2 + 6x + 1 = 0;\ \ \frac{x^4}{4} - x = 0.$$