Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Ottavo Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte nell'intervallo aperto (a,b) e siano $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ tre punti tali che $f(x_i) = 0$, $i = 1,2,3$. Dimostrare che esiste $\xi \in (x_1, x_3)$ tale che $f''(\xi) = 0$.

Esercizio 2. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostrare che se esiste $f''(x_0)$ allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{2h^2} = f''(x_0).$$

Esercizio 3. Sia $f(x)$ continua e derivabile in un intervallo della forma (α,β). Sia $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, tale che $f(a) = f(b) = 0$ e $f'(a) = f'(b) = 1$. Mostrare che esiste $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = 0$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ indefinitamente derivabile e tale che $f^{(n)}(x) = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. Mostrare che f è un polinomio di grado minore o uguale a $n-1$.

Esercizio 5. Denotiamo con $C^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabili con continuità. Siamo $\phi, \varphi \in C^2(\mathbb{R})$ tali che $\varphi'(x) = \phi(x), \phi'(x) = -\varphi(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\varphi(0) = 0, \phi(0) = 1$. Mostrare che $[\varphi(x)]^2 + [\phi(x)]^2 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Calcolare i seguenti limiti usando la regola di l'Hopital (quando possibile!).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x\sin x};\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \ln(\cos x)}{x\sin x};\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 2x};\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\tan 2x};\ \lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2};\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x+\sqrt{x}};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos x+x^2};\ \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{3x}};\ \lim_{x\to+\infty}2^{\sin x};\ \lim_{x\to 0^+}x^x;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\sin x}{1+\cos^2 x};\ \lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{1-4^x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln\cos x};\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3+\sin x)}{x};\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{x}};\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin[\ln(3x+1)]}{e^x-3^x};\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x)^3]}{\sin 5x+\sqrt[3]{x^4}\sin x};\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\tan \pi x}.$$

Esercizio 7. Trovare lo sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni, con punto iniziale $x_0 = 0$.

$$\frac{1}{2-x};\ \frac{1}{\sqrt{4-x^3}};\ \sin(\pi - x);\ 2^{x-1};\ \ln(1-x^2).$$

Esercizio 8. Scrivere fino al termine x^5 incluso gli sviluppi delle seguenti funzioni.

$$\sin^3 x;\ \sqrt{x+1}-\sqrt{1-x};\ \sin^2 x - \sin(x^2);\ (e^x-1)^2;\ \ln(1+\sin x);$$

$$\tan x;\ \frac{1}{1+x+x^2};\ \frac{x-\sin x}{x^2};\ \arctan(1-x^2).$$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti usando il polinomio di Taylor (quando possibile).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^2}+x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2};\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^3(e^x-\cos x)};\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^4)[\sin(x^2)-\sin^2 x]}{1-\cos(x^4)};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\arctan x+32x\sin^3 x}{1-\cos 2x+\sin 4x};\ \lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x - x^2}{\sqrt{1+x^4}-\cos x};\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{(1-\cos x)\sin x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\arctan x)-e^{x^2}+1}{\sqrt{1+2x^4}-1};\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)-\sin^3 x}{x^3(\cos(x^3)-\cos^3 x)};\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\cos 2x)}{\ln(\tan 2x)};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}{\ln[\ln(e+x^2)]}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\arctan x - x\sin x}{\arctan x - 1 - \ln(1+x) + \cos x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^5 e^{x^3} - \ln(1+x^5)}{[\sqrt{1+x^4}-1]^2}.$$

Esercizio 10. Si calcoli $\sqrt{e}$ con un errore non superiore a 10^{-6}.