Analisi Matematica 1, anno 2015/2016 (canale I-Z)

Ottavo Foglio di Esercizi

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali.

$$\int \frac{1}{(2+3x)^4}dx; \ \int \sqrt{1+4x}dx; \ \int \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}dx; \ \int xe^{-x^2}dx; \ \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx; \ \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx;$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx; \ \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx; \ \int \frac{1}{x\ln x}dx; \ \int \frac{\ln x}{x}dx; \ \int \frac{(\ln x)^n}{x}dx, \ n\in\mathbb{N}; \ \int \frac{(1+x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali.

$$\int \tan^2 x dx; \ \int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx; \ \int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}dx; \ \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}dx; \ \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx; \ \int \frac{1}{1+e^{2x}}dx.$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali per parti.

$$\int xe^x dx; \ \int x^2e^x dx; \ \int x\sin x dx; \ \int x\cos x dx; \ \int e^x\cos x dx; \ \int \arctan x dx; \ \int \arcsin x dx;$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx; \ \int \sin^2 x dx; \ \int \ln x dx; \ \int x\arctan x dx; \ \int \sqrt{1+x^2}dx; \ \int \ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1});$$

$$\int x\sin^2 x dx; \ \int e^{\arcsin x}dx; \ \int \cos^2 x dx; \ \int e^x\sin^2 x dx.$$

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali per sostituzione.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx; \ \int x^3e^{x^2}; \ \int \sqrt{a^2-x^2}dx; \ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx; \ \int \sqrt{x^2-1}dx; \ \int \sqrt{e^x-1}dx.$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali.

$$\int \frac{x^3+2x^4}{x^3+1}dx; \ \int \frac{2x+1}{x^2-x+1}dx; \ \int \frac{1}{x^2-1}dx; \ \int \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}dx; \ \int \frac{3x-11}{2x+1}dx; \ \int \frac{3x+1}{x^2-5x+6};$$

$$\int \frac{x^4+9}{x^2-5x+6}dx; \ \int \frac{x}{(x+2)(x-1)}dx; \ \int \frac{x^5+4}{x^2+3x+2}dx; \ \int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}dx; \ \int \frac{2+\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx.$$

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale definiti.

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx, \ \int_{\mathbb{R}} f_j(x)dx$$

quando $f_j(x)$ vale quanto segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x\in[0,1] \\ -x+2 & \text{se } x\in(1,2] \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}-[0,2]; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & \text{se } x\in[0,5] \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}-[0,5]; \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - [-\pi, \pi]; \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} [x] & \text{se } x \in [0, 20] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - [0, 20]; \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^5+x^3+x}{x^6+x^4+x^2+1} & \text{se } x \in [-20, 20] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - [-20, 20]; \end{cases}$$

Esercizio 7. Studiare l'esistenza dei seguenti integrali.

$$\int_0^1 \ln x dx; \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\ln x} dx,\ \alpha \in \mathbb{R}; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha \ln x} dx, \alpha \in \mathbb{R}; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln(x^\alpha)} dx,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8. Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione decrescente e non negativa. Mostrare che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

esiste se e solo se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

converge.

Esercizio 9. Studiare i seguenti integrali impropri.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx; \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{e^{x^2}} dx; \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln x} dx,\ \alpha \in \mathbb{R}_+.$$