# Corso di Geometria 2010-11
# BIAR, BSIR
# Esercizi 9: soluzioni

**Esercizio 1.** Nello spazio sono dati i punti $A = (1,2,3), B = (2,4,5), C = (1,1,4)$.

a) Scrivere equazioni parametriche della retta $r_1$ passante per $A$ e $B$.

b) Scrivere equazioni parametriche della retta $r_2$ passante per $C$ e parallela alla retta $r_1$.

c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per $A, B, C$.

d) Scrivere l'equazione del piano passante per $A$ e parallelo al piano $x - y + 2z + 4 = 0$.

*Soluzione.* a) *I parametri direttori di $r_1$ sono proporzionali a $B - A = (1,2,2)$ dunque $r_1$ ha equazioni parametriche* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

b) $r_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$.

c) *Dalla formula del piano per tre punti otteniamo* $\pi : 4x - y - z + 1 = 0$.

d) $x - y + 2z - 5 = 0$. □

**Esercizio 2.** a) Scrivere le equazioni parametriche della retta $r$ parallela all'asse $z$ e passante per $P_0 = (1,2,0)$.

b) Scrivere equazioni parametriche della retta $s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

c) È vero che $r$ è parallela a $s$?

d) È vero che $r$ e $s$ sono incidenti?

*Soluzione.* a) *L'asse $z$ ha parametri direttori $(0,0,1)$ quindi $r$ ha equazioni parametriche* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

b) *Risolvendo rispetto a $x$ otteniamo* $s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases}$.

c) *No: i parametri direttori di $r$ e $s$ non sono proporzionali.*

d) *$r$ e $s$ si incontrano nel punto* $(1,2,2)$. □

**Esercizio 3.** a) Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente l'origine e la retta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

b) Determinare le coordinate di un punto $A$ tale che il vettore $\overrightarrow{OA}$ sia non nullo e parallelo alla retta $r$. È vero che $A$ deve appartenere al piano $\pi$?

*Soluzione.* a) *La retta passa per $A = (1,2,3)$ e $B = (0,0,2)$. Il piano cercato è l'unico piano passante per $O, A, B$, e ha equazione cartesiana*

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

*cioè $\pi : 2x - y = 0$. Potevamo anche procedere scrivendo il fascio di piani di asse $r$ e imponendo il passaggio per $O$.*

b) *Il vettore $\overrightarrow{OA}$ è un vettore direttore di $r$, e ha coordinate proporzionali ai parametri direttori $(-1,-2,-1)$. Otteniamo infiniti punti $A = (k, 2k, k)$ con $k \neq 0$. Il punto $A$ appartiene al piano $\pi$ per ogni valore di $k$.* □

**Esercizio 4.** Calcolare i parametri direttori della retta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ e scrivere l'equazione del piano contenente $r$ e passante per l'origine.

*Soluzione.* a) *I parametri direttori di $r$ sono proporzionali alla terna $(1,3,2)$.*

b) *Il fascio ridotto di piani di asse $r$ si scrive $x - y + z + k(2x - z + 3) = 0$; imponendo il passaggio per l'origine otteniamo $k = 0$. Dunque il piano cercato è $x - y + z = 0$.* □

**Esercizio 5.** Determinare l'equazione del piano passante per $A = (1, 1, 4)$ e parallelo a entrambe le rette:

$$r : \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

*Soluzione. I parametri direttori di $r$ sono $(0, 1, 1)$ e quelli di $s$ sono $(2, -2, -1)$. Il piano cercato ha equazione cartesiana*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

*cioè $\pi : x + 2y - 2z + 5 = 0$.* $\square$

**Esercizio 6.** Si considerino i punti $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (1, 3, -1), P_4 = (1, -3, 1)$, la retta $r$ passante per $P_1$ e $P_2$, e la retta $s$ passante per $P_3$ e $P_4$.

a) Stabilire se le rette $r$ ed $s$ sono complanari o sghembe; se complanari, determinare l'equazione del piano che le contiene.

b) Esiste un piano passante per $P_1, P_2$, parallelo al piano $\pi : x + 2y - z = 0$?

*Soluzione.* a) *Il piano per $P_1, P_2, P_3$ ha equazione $\pi : x + y + 3z - 1 = 0$. Il quarto punto $P_4$ appartiene a $\pi$: dunque i punti sono complanari, tutti contenuti nel piano $\pi$.*

b) *No. Il piano parallelo a $\pi$ e passante per $P_1$ è unico, e ha equazione $x + 2y - z - 1 = 0$. Tale piano non contiene $P_2$.* $\square$

**Esercizio 7.** Dimostrare che le rette $r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, s : \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ sono parallele (dunque complanari) e determinare l'equazione del piano che le contiene.

*Soluzione. I parametri direttori delle due rette sono entrambi proporzionali a $(2, 1, 1)$: dunque le rette sono parallele. Per determinare il piano contenente $r$ e $s$, basta trovare due punti su $r$, ad esempio $O = (0, 0, 0), A = (2, 1, 1)$ e un punto di $s$, ad esempio $B = (1, 1, 2)$. Il piano cercato sarà quello passante per $O, A, B$ e ha equazione $x - 3y + z = 0$.* $\square$

**Esercizio 8.** a) Stabilire se le rette $r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ sono complanari o sghembe.

b) Esiste una retta passante per $P_0 = (2, 0, 2)$, che incontra sia $r_1$ che $r_2$?

*Soluzione.* a) *Le rette sono sghembe. Infatti, i parametri direttori di $r_1$ sono $(0, 1, 1)$ mentre i parametri direttori di $r_2$ sono $(0, 1, 0)$: le rette non sono parallele. Inoltre, si vede facilmente che $r_1$ e $r_2$ non hanno punti comuni.*
b) *La risposta è affermativa. Il piano $\pi$ contenente $P_0$ e $r_1$ è $\pi : x + y - z = 0$. Tale piano incontra la retta $r_2$ nel punto $P_1 = (1, 0, 1)$. Consideriamo la retta $s$ passante per $P_0$ e $P_1$, di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} ;$$

*si verifica che $s$ incontra la retta $r_1$ nell'origine e la retta $r_2$ nel punto $P_1$. Dunque $s$ è la retta cercata.* □

**Esercizio 9.** Sono dati il piano $\pi : x + 2y + z + 1 = 0$ e il punto $P_0 = (-4, 1, 1) \in \pi$. Trovare le equazioni cartesiane della retta $r$ contenuta nel piano $\pi$, passante per $P_0$ e incidente l'asse $z$.

*Soluzione. La retta cercata passa per $P_0$ e per l'intersezione di $\pi$ con l'asse $z$, che è il punto $(0, 0, -1)$. Dunque i parametri direttori di $r$ sono $(4, -1, -2)$ e le equazioni parametriche di $r$ sono:*

$$r : \begin{cases} x = 4t \\ y = -t \\ z = -1 - 2t \end{cases} .$$

□

**Esercizio 10.** Si considerino i punti $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1), D = (-1, -1, -1)$.
a) Stabilire se i punti $A, B, C, D$ sono complanari oppure no.
b) Scrivere l'equazione del piano $\pi$ passante per $D$ e parallelo al piano per $A, B, C$.
c) Scrivere l'equazione del piano $\pi'$ contenente $D$ e la retta per $A$ e $B$.
d) Trovare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine, parallelo sia alla retta per $A$ e $B$ che alla retta per $C$ e $D$.

*Soluzione.* a) *I punti non sono complanari: il piano passante per $A, B$ e $C$ ha equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ e non contiene $D$.*
b) *Il piano cercato ha equazione $x + y + z + 3 = 0$.*
c) *Il piano cercato è quello contenente $A, B, D$ e ha equazione $x + y - 3z - 1 = 0$.*

d) *La retta per $A$ e $B$ ha parametri direttori proporzionali a $(1,-1,0)$, mentre la retta per $C$ e $D$ ha parametri direttori proporzionali a $(1,1,2)$. Il piano cercato ha equazione*

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

*ovvero $x + y - z = 0$.* □

**Esercizio 11.** Consideriamo il piano $\pi$ di equazione $ax+by+cz+d = 0$ e la retta $r$ di equazioni cartesiane: $\begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$. Dimostrare che $r$ è parallela a $\pi$ se e solo se:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = 0.$$

*Soluzione. Osserviamo innanzitutto che, dati una retta $r$ e un piano $\pi$, si ha che o $r$ è parallela a $\pi$ oppure $r$ e $\pi$ si incontrano in un solo punto. Consideriamo il sistema lineare:*

$$S : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

*Ora $r$ e $\pi$ sono incidenti in un punto se e solo se $S$ ammette un'unica soluzione: questo avviene, per il teorema di Cramer, se e solo se la matrice dei coefficienti ha determinante non nullo, cioè $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} \neq 0$. Per contrapposizione, $r$ è parallela a $\pi$ se e solo se tale determinante è nullo.*
□

**Esercizio 12.** Trovare l'equazione del piano passante per la retta $r : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$ e parallelo alla retta $s$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

*Soluzione. Il fascio ridotto di piani di asse $r$ ha equazione $x - y - 2 + k(x + z - 3) = 0$, ovvero*

$$(1 + k)x - y + kz - 3k - 2 = 0.$$

*Ora imponiamo il parallelismo con la retta $r$, che ha parametri direttori $(1, 3, 1)$: otteniamo $k = 1$. Il piano cercato è unico, e ha equazione $2x - y + z - 5 = 0$.* $\square$

**Esercizio 13.** Per quali valori di $k$ i quattro punti $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 2), (1, k, 3)$ sono complanari?

*Soluzione. Unico valore: $k = 2$. Infatti, il piano per i primi tre punti ha equazione:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

*ovvero $x + y - z = 0$. Il quarto punto, cioè $(1, k, 3)$, appartiene a tale piano se e solo se $k = 2$.* $\square$