Parte 6. Applicazioni lineari

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni

1 Applicazioni fra insiemi

Se A e B sono due insiemi, un' *applicazione* da A in B è una legge che associa a ciascun elemento $a \in A$ un elemento $f(a) \in B$, e scriveremo

$$f : A \to B.$$

A è detto *insieme di partenza* e B *insieme di arrivo.* L'*immagine* di f è il sottoinsieme di B costituito da tutti gli elementi di B che sono immagine di almeno un elemento di A:

$$\mathrm{Im} f = \{b \in B : b = f(a) \quad \text{per qualche} \quad a \in A\}.$$

L'applicazione f si dice *suriettiva* se $\mathrm{Im} f = B$, se cioè ogni elemento di B è l'immagine di qualche elemento di A.

L'applicazione f si dice *iniettiva* se trasforma elementi distinti di A in elementi distinti di B, quindi se, dati $a, a' \in A$:

$$a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a').$$

Un modo equivalente di esprimere l'iniettività di f è il seguente:

$$f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

Un'applicazione f si dice *biiettiva* (o anche *biunivoca*) se è sia iniettiva che suriettiva.

Esempio Stabilire l'iniettività e la suriettività di ciascuna delle seguenti applicazioni $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$f_1(x) = x^2$$
$$f_2(x) = e^x$$
$$f_3(x) = x^3 - x$$
$$f_4(x) = x^3$$

Soluzione. (a) $f_1(x)$ non è iniettiva, poichè $f_1(1) = f_1(-1) = 1$, e non è suriettiva, poichè

$\mathrm{Im} f_1 = [0, \infty)$, quindi in particolare $-1 \notin \mathrm{Im} f_1$.
(b) f_2 è iniettiva perché la funzione esponenziale è crescente; non è però suriettiva perché $\mathrm{Im} f_2 = (0, \infty)$, quindi $-1 \notin \mathrm{Im} f_2$.
(c) f_3 non è iniettiva, poiché $f_3(-1) = f_3(0) = f_3(1) = 0$; è però suriettiva (disegnare il grafico di $f_3(x)$).
(d) f_4 è iniettiva poichè crescente, e anche suriettiva: l'equazione $x^3 = y$ nell'incognita x ammette una soluzione (per di piú unica) per ogni $y \in \mathbf{R}$:

$$y = x^{1/3}$$

Dunque f_4 è biiettiva.

Esercizio Dimostrare che l'applicazione

$$f : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{R}$$

definita da $f(A) = \det A$ è suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio Sia ora $A = \{1, 2, 3\}$. Elencare tutte le applicazioni biiettive da A in A.

2 Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

Fissiamo ora due spazi vettoriali V e V', che d'ora in poi supporremo di dimensione finita. Ci proponiamo di studiare in dettaglio un tipo particolare di applicazioni da V in V': le *applicazioni lineari,* che sono quelle applicazioni che "rispettano" le operazioni definite in uno spazio vettoriale (somma e prodotto per uno scalare).

Definizione *Sia $f : V \to V'$ un'applicazione da uno spazio vettoriale V in uno spazio vettoriale V'. Tale f si dice* lineare *se verifica le seguenti proprietà.*

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) & \textit{per ogni} \quad u, v \in V, \\ f(au) = af(u) & \textit{per ogni} \quad a \in \mathbf{R}, u \in V. \end{cases}$$

Osserviamo che le due condizioni sono equivalenti all'unica condizione:

$$f(au+bv) = af(u) + bf(v) \quad \text{per ogni} \quad a, b \in \mathbf{R}, u, v \in V.$$

Per induzione, si dimostra che un'applicazione lineare trasforma combinazioni lineari in combinazioni lineari:

$$f(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1f(v_1) + \cdots + a_kf(v_k),$$

per ogni $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}, v_1 \ldots, v_k \in V$.

- Un'applicazione lineare da V in V' si dice anche un *omomorfismo* da V in V'.

Vedremo molti esempi più in avanti. Osserviamo poi che ogni applicazione lineare trasforma il vettore nullo di V nel vettore nullo di V', e porta vettori opposti in vettori opposti:

Proposizione *Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Allora:*
a) $f(O) = O$.
b) $f(-v) = -f(v)$ *per ogni* $v \in V$.

Dimostrazione. a) Basta osservare che

$$f(O) = f(O+O) = f(O) + f(O)$$

dunque $f(O) = O$.
b) Abbiamo

$$O = f(O) = f(v-v) = f(v) + f(-v)$$

dunque $f(-v) = -f(v)$. $\square$

Esempio Un esempio banale di applicazione lineare è dato dall'applicazione *nulla,* denotata con $O : V \to V'$, che trasforma tutti i vettori di V nel vettore nullo di V':

$$O(v) = O,$$

per ogni $v \in V$.

Esempio L'applicazione $f : \mathbf{Mat}(n \times n) \to \mathbf{Mat}(n \times n)$ definita da $f(A) = A^T$ è lineare, poiché, per ogni $A, B \in \mathbf{Mat}(n \times n)$ e ogni $k \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} f(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = f(A) + f(B) \\ f(kA) = (kA)^T = kA^T = kf(A) \end{cases}$$

Esempio L'applicazione $f : \mathbf{Mat}(n \times n) \to \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \det A$ *non è* lineare. Basta infatti osservare che, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora $\det(A + B) = \det I = 1$, mentre $\det A + \det B = 0$, quindi

$$f(A + B) \neq f(A) + f(B).$$

Esempio L'operatore di derivazione $D : \mathbf{R}^n[x] \to \mathbf{R}^n[x]$, definito come:

$$D(p(x)) = p'(x)$$

è un'applicazione lineare.

3 Applicazioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$

Iniziamo descrivendo una classe di applicazioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Sia A una matrice $m \times n$, e $v \in \mathbf{R}^n$, scritto in forma colonna. Allora il prodotto Av è un vettore di $\mathbf{R}^m$. Dunque possiamo definire un'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ nel seguente modo:

$$f(v) = Av.$$

Dalle proprietà del prodotto di matrici, vediamo subito che f è un'applicazione lineare.

Esempio La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ definisce la seguente applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ -y + 2z \end{pmatrix}.$$

Notiamo che ogni entrata di $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è una funzione lineare omogenea di x, y, z. Notiamo anche che se (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbf{R}^3$, allora:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sono i vettori colonna della matrice A. $\square$

Esempio Ora vogliamo dimostrare che ogni applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ si scrive

$$f(v) = Av$$

con A un'opportuna matrice 2×3. Consideriamo le immagini dei vettori della base canonica:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Allora, se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è il vettore generico di $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(v) &= f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

quindi $f(v) = Av$ con $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$. La matrice A è detta *matrice canonica* di f, e ha colonne $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Esempio a) Scrivere l'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcolare i seguenti vettori: $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La matrice canonica di f è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Dunque

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z \\ x-2y+z \end{pmatrix}.$$

Si ha: $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In conclusione:

- Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare, e sia A la matrice 2×3 le cui colonne sono $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. A è detta la matrice canonica di f. Allora f si scrive:

$$f(v) = Av.$$

Viceversa, ogni applicazione del tipo precedente è lineare.

Quanto appena detto per le applicazioni lineari $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ si generalizza facilmente alle applicazioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$, per ottenere la seguente

Proposizione a) *Sia f un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Se A è la matrice $m \times n$ di colonne $f(e_1), \dots, f(e_n)$, detta la* matrice canonica *di f, allora f si scrive:*

$$f(v) = Av.$$

per ogni vettore colonna $v \in \mathbf{R}^n$.

b) *Viceversa, per ogni matrice A di tipo $m \times n$ l'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definita da $f(v) = Av$ è lineare.*

Quindi, le applicazioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ sono in corrispondenza biunivoca con le matrici $m \times n$.

Notiamo che un'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è lineare se e solo se è del tipo

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

con coefficienti $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$. Una tale applicazione si dice *funzione lineare omogenea* di $x_1, \dots, x_n$. Più in generale, un'applicazione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ è lineare se e solo se ogni entrata del vettore immagine $f(v)$, dove $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, è una funzione lineare omogenea di $x_1, \ldots, x_n$.

Esempio L'applicazione $f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \\ x + y \end{pmatrix}$$

è lineare. Essa si scrive

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e la sua matrice canonica è $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esempio L'applicazione $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 0 \\ x + 4z \end{pmatrix}$$

è lineare con matrice canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esempio L'applicazione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3 \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

non è lineare, in quanto la prima entrata di $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non è una funzione lineare omogenea di x, y.

4 Omomorfismo assegnato su una base

Abbiamo visto che ogni applicazione lineare da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ si puo' rappresentare con una matrice. Vedremo che cio' è vero per ogni applicazione lineare da uno spazio vettoriale V di dimensione n in un'altro spazio vettoriale W di dimensione n.
Iniziamo con l'osservare che un'applicazione lineare $f : V \to W$ è determinata dai valori che assume su una base di V.

Teorema *Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una sua base. Siano inoltre $w_1, \dots, w_n$ vettori arbitrari di W. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che:*

$$\begin{cases} f(v_1) = w_1 \\ f(v_2) = w_2 \\ \dots \\ f(v_n) = w_n \end{cases}.$$

In particolare, se f si annulla su una base allora $f = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che tale applicazione esiste. Sia v un vettore di V, quindi: $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Definiamo $f(v)$ nel seguente modo:

$$f(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n.$$

Si dimostra che f è lineare, e soddisfa le condizioni.
Facciamo ora vedere che tale applicazione è unica. Se infatti g fosse una seconda applicazione lineare che verifica le condizioni date, cioè $f(v_i) = g(v_i) = w_i$ per ogni i, allora:

$$f(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n = g(v)$$

per ogni $v \in V$, quindi $f = g$. $\square$

Esempio Trovare l'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

dove (e_1, e_2) è la base canonica di $\mathbf{R}^2$.

Soluzione. Si ha $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$ quindi:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f(xe_1 + ye_2) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) \\ &= x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ 3x - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In conclusione:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x - y \end{pmatrix}.$$

Potevamo anche procedere direttamente: sappiamo che i trasformati dei vettori della base canonica sono proprio le colonne della matrice canonica di f. Dunque la matrice canonica di f è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x - y \end{pmatrix}$. $\square$

Esempio Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trovare l'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Dobbiamo prima vedere quali valori assume la f sui vettori della base canonica. Esprimiamo i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^2$ rispetto alla base (v_1, v_2):

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \\ e_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} f(e_1) = \frac{1}{2}f(v_1) + \frac{1}{2}f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ f(e_2) = \frac{1}{2}f(v_1) - \frac{1}{2}f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La matrice canonica di f è $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ dunque

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}.$$

Metodo alternativo: partiamo dalla generica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Imponiamo le condizioni e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a - b \\ c - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

e risolvendo otteniamo $a = 2, b = -1, c = 4, d = -2$, quindi

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}.$$

□

Se i vettori sui quali si assegna f non formano una base, potremmo avere dei problemi.

Esempio Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dimostrare che non esiste alcuna applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soluzione. Notiamo che $v_2 = 2v_1$ dunque i vettori di partenza non formano una base. Poiche' f è lineare, si dovrebbe avere

$$f(v_2) = 2f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ma questo contraddice la condizione $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi una tale f non esiste. □

Esempio Nella notazione dell'esempio precedente, dimostrare che esistono infinite applicazioni lineari $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

5 Matrice associata

Sia $f : V \to W$ lineare, con V e W di dimensione finita, e fissiamo una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e una base $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ di W.

Con questi dati, definiamo la *matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$* con la regola seguente:

- La $i-$esima colonna di A è data dalle coordinate del vettore $f(v_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, per $i = 1, \dots, n$.

Osseviamo che, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, allora A è di tipo $m \times n$. Ovviamente A dipende, oltre che da f, anche dalle basi scelte.

Esempio Sia $f : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ c - 3d \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ e alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, rispettivamente.

Soluzione. Abbiamo:

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Esempio Calcoliamo la matrice associata all'omomorfismo "derivazione" $D : \mathbf{R}^3[x] \to \mathbf{R}^3[x]$ definito da $D(p(x)) = p'(x)$. Scegliamo la base canonica sia nello spazio di partenza che nello spazio di arrivo. La base canonica di $\mathbf{R}^3[x]$ è formata dai tre monomi

$$E_0(x) = 1, \quad E_1(x) = x, \quad E_2(x) = x^2.$$

Si ha quindi
$$\begin{cases} D(E_0(x)) = 0 \\ D(E_1(x)) = 1 = 1 \cdot E_0(x) + 0 \cdot E_1(x) + 0 \cdot E_2(x) \\ D(E_2(x)) = 2x = 0 \cdot E_0(x) + 2 \cdot E_1(x) + 0 \cdot E_2(x) \end{cases}$$
Incolonnando le coordinate, otteniamo la matrice associata
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineare. Allora la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche è quella che abbiamo chiamato la *matrice canonica* di f.

Ecco la proprietà importante della matrice associata.

Teorema *Siano $f : V \to W$ un'applicazione lineare, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V e $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ una base di W. Consideriamo la matrice associata a f rispetto alle basi scelte. Se $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ è il vettore colonna delle coordinate del vettore v rispetto a $\mathcal{B}$, allora le coordinate di $f(v)$ sono date da AX.*

Dimostrazione. È una verifica, che omettiamo. □

In altre parole, le coordinate del vettore immagine $f(v)$ si ottengono moltiplicando la matrice associata ad f per il vettore colonna delle coordinate di v.

Esempio Consideriamo il polinomio $p(x) = 3 - x + 2x^2$, che ha coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Sappiamo che la matrice associata all'omomorfismo derivazione, rispetto alle basi canoniche, è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Allora le coordinate di $p'(x)$ sono date da
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque $p'(x) = -1 + 4x$.

Esempio Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione 3 e 2, rispettivamente. Fissiamo la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di V e la base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2)$ di W, e si consideri l'unico omomorfismo

$f : V \to W$ definito da:

$$\begin{cases} f(v_1) = 2w_1 + w_2 \\ f(v_2) = -4w_1 - 2w_2 \\ f(v_3) = 2w_1 + w_2 \end{cases}$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi scelte.

b) Determinare $f(v_1 - v_2 + 3v_3)$ e $f(2v_1 + v_2)$.

c) Determinare l'insieme di tutti i vettori $v \in V$ tali che $f(v) = O$ (vettore nullo di W).

Soluzione. a) Direttamente dalla definizione, la matrice associata è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Il vettore $v_1 - v_2 + 2v_3$ ha coordinate $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Dunque le coordinate del suo trasformato sono:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $f(v_1 - v_2 + 2v_3) = 10w_1 + 5w_2$.
Analogamente si trova che

$$f(2v_1 + v_2) = O.$$

c) Occorre risolvere il sistema:

$$AX = O,$$

equivalente all'unica equazione $x - 2y + z = 0$, che quindi ammette ∞^2 soluzioni $\begin{pmatrix} 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix}$ con $s, t \in \mathbf{R}$. Dunque i vettori cercati sono del tipo:

$$(2s - t)v_1 + sv_2 + tv_3.$$

□

6 Nucleo

Definizione *Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Il* nucleo *di f è il sottoinsieme di V costituito da tutti i vettori la cui immagine è il vettore nullo di V'.*

Il nucleo di f si denota con il simbolo $\text{Ker}f$. Dunque:

$$\text{Ker}f = \{v \in V : f(v) = O\}.$$

Il nucleo è importante perchè caratterizza l'iniettività.

Proposizione a) $\text{Ker}f$ *è un sottospazio di V.*

b) *f è iniettiva se e solo se* $\text{Ker}f = \{O\}$.

Dimostrazione. a) Dimostriamo che il nucleo è un sottospazio. Sappiamo già che $f(O) = O$, dunque $O \in V$. La linearità della f implica facilmente che il nucleo è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare.

b) Supponiamo che f sia iniettiva e facciamo vedere che $\text{Ker}f = \{O\}$. Se $v \in \text{Ker}f$, allora $f(v) = O$. D'altra parte $f(O) = O$; quindi $f(v) = f(O)$. Poichè f è iniettiva per ipotesi, si deve avere $v = O$. Dunque il nucleo contiene solamente il vettore nullo.

Supponiamo ora che $\text{Ker}f = \{O\}$ e facciamo vedere che f è iniettiva, verificando che

$$f(u) = f(v) \Longrightarrow u = v.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(u) = f(v) &\Longrightarrow f(u) - f(v) = O \\ &\Longrightarrow f(u - v) = O \\ &\Longrightarrow u - v \in Kerf \\ &\Longrightarrow u - v = O \\ &\Longrightarrow u = v. \end{aligned}$$

□

In pratica, per trovare una base del nucleo basta risolvere l'equazione vettoriale

$$f(v) = O$$

che si traduce in un sistema lineare omogeneo. Vedremo esempi più in avanti.

Esercizio Sia f un'applicazione lineare iniettiva da V in V', e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori linearmente indipendenti di V. Dimostrare che i vettori trasformati

$$f(v_1), \dots, f(v_k)$$

sono linearmente indipendenti. Cioè: *un'applicazione lineare iniettiva trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.* (Attenzione: f deve essere iniettiva, altrimenti l'affermazione non è sempre vera).

7 Immagine

Data un'applicazione lineare $f : V \to V'$ consideriamo ora la sua immagine

$$\mathrm{Im} f = \{v' \in V' : v' = f(v) \quad \text{per qualche } v \in V\}.$$

Dunque $\mathrm{Im} f$ è un sottoinsieme dello spazio di arrivo V'. Si dimostra facilmente che

- $\mathrm{Im} f$ è un sottospazio di V'.

Ricordiamo che f si dice suriettiva se $\mathrm{Im} f = V'$.

Proposizione *Sia $f : V^n \to V'^m$ un'applicazione lineare. Allora:*
a) *f è suriettiva se e solo se $\dim(\mathrm{Im} f) = m$.*
b) *Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ generano V, allora i vettori $f(v_1), \dots, f(v_k)$ generano $\mathrm{Im} f$, cioè:*

$$\mathrm{Im} f = L[f(v_1), \dots, f(v_k)].$$

Dimostrazione. a) f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im} f = V'$. Poiché $\mathrm{Im} f$ è un sottospazio di V', questo avviene se e solo se $\dim \mathrm{Im} f = \dim V' = m$.

b) Basta far vedere che vale la doppia inclusione:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im} f \subseteq L[f(v_1), \dots, f(v_k)]; \\ &L[f(v_1), \dots, f(v_k)] \subseteq \mathrm{Im} f \end{aligned}$$

Per la prima inclusione, mostriamo che ogni vettore dell'immagine è una combinazione lineare dei vettori $f(v_1), \dots, f(v_k)$. Se $v' \in \mathrm{Im} f$, allora $v' = f(v)$ per qualche $v \in V$. Scriviamo

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k;$$

quindi

$$\begin{aligned} v' = f(v) &= f(a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k) \\ &= a_1 f(v_1) + \cdots + a_k f(v_k) \end{aligned}$$

La seconda inclusione è lasciata per esercizio. □

In particolare, se $f : V^n \to V'^m$ è lineare, e se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V, allora:

$$\mathrm{Im} f = L[f(v_1), \dots, f(v_n)],$$

quindi l'immagine è generata dai trasformati dei vettori di una qualunque base.

La proposizione seguente permette di calcolare la dimensione dell'immagine tramite il rango di una matrice associata.

Proposizione *Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare, e sia A la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ di V'. Allora*

$$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rk} A.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che, se E è il sottospazio di W generato dai vettori $u_1, \dots, u_k$, allora la dimensione di E uguaglia il rango della matrice ottenuta incolonnando le coordinate di $u_1, \dots, u_k$ rispetto ad una qualunque base di W. Poiche'

$$\mathrm{Im} f = L[f(v_1), \dots, f(v_n)],$$

e le colonne della matrice associata A sono proprio le coordinate di $f(v_1), \dots, f(v_n)$, la proposizione segue immediatamente. $\square$

Nel caso in cui $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ è lineare, possiamo considerare la matrice canonica di f (cioè la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche). Allora:

a) L'immagine di f è generata dai vettori colonna di A.

b) La dimensione dell'immagine di f uguaglia il rango di A.

8 Esempi

Esempio Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ x + y + 4z \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Per trovare il nucleo, basta porre:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare omogeneo di due equazioni in tre incognite, con insieme delle soluzioni

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Quindi una base di Ker$f$ è $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la sua dimensione è 1, in particolare f non è iniettiva.

Fissata la base canonica (e_1, e_2, e_3) di $\mathbf{R}^3$, sappiamo che l'immagine è generata dai vettori $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, quindi

$$\mathrm{Im} f = L \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

Chiaramente i tre generatori sono linearmente dipendenti; togliendo l'ultimo abbiamo però l'indipendenza lineare dei primi due, e una base di Imf è dunque

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La dimensione dell'immagine è 2, pari alla dimensione dello spazio di arrivo: ciò significa che $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}^2$ e quindi f è suriettiva.

Per la dimensione dell'immagine, bastava anche usare la matrice canonica di f:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2. Dunque $\dim \mathrm{Im} f = 2$ e quindi $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}^2$.

Notiamo che, nell'esempio:

$$\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = 3$$

e 3 è proprio la dimensione dello spazio di partenza.

Esempio Sia $D : \mathbf{R}^4[x] \to \mathbf{R}^4[x]$ l'applicazione lineare che associa a un polinomio la sua derivata:

$$D(p(x)) = p'(x).$$

Determinare basi del nucleo e dell'immagine di D.

Soluzione. Per il nucleo, imponiamo $D(p(x)) = 0$. La derivata di un polinomio è nulla se e solo se il polinomio è una costante; dunque $\mathrm{Ker}D$ è il sottospazio formato dai polinomi costanti. Tale sottospazio ha dimensione 1, ed è generato dal polinomio costante $E_0(x) = 1$. Consideriamo la base canonica di $\mathbf{R}^4[x]$:

$$(1, x, x^2, x^3).$$

Dunque $\mathrm{Im}f$ è generata dai trasformati:

$$D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x, D(x^3) = 3x^2.$$

Si vede facilmente che $\mathrm{Im}f$ è il sottospazio formato dai polinomi di grado minore o uguale a 2. Dunque $\dim \mathrm{Im}f = 3$. Si poteva anche procedere con una matrice associata.

Esempio Sia $D_2 : \mathbf{R}^4[x] \to \mathbf{R}^4[x]$ l'applicazione lineare che associa a un polinomio la sua derivata seconda:

$$D_2(p(x)) = p''(x).$$

Determinare basi del nucleo e dell'immagine di D.

Soluzione. Si vede facilmente che il nucleo è formato dai polinomi di grado minore o uguale a 1, e che l'immagine è uguale al nucleo.

9 Teorema della dimensione

Per un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale V^n in un altro spazio vettoriale V' esiste un legame fra la dimensione del nucleo e quella dell'immagine. Tale relazione è data dal teorema seguente, noto come *teorema della dimensione.*

Teorema *Sia $f : V^n \to V'$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f = n$$

dove n è la dimensione dello spazio di partenza.

Dimostrazione. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{B}'$ di V' e consideriamo la matrice A, associata a f rispetto a tali basi. Se v è un vettore di V, e $X \in \mathbf{R}^n$ è il vettore colonna delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, sappiamo che le coordinate di $f(v)$ sono date dal vettore colonna $AX \in \mathbf{R}^m$. Dunque l'equazione che definisce il nucleo:

$$f(v) = 0$$

si traduce nel sistema lineare omogeneo, di m equazioni in n incognite

$$S : AX = 0.$$

Si ha dunque che

$$\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Sol}(S).$$

Dal teorema di Rouché-Capelli sappiamo che la dimensione di $\mathrm{Sol}(S)$ è uguale a $n - \mathrm{rk}A$. Dunque:

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Ker} f &= n - \mathrm{rk}A \\ &= n - \dim \mathrm{Im} f\end{aligned}$$

e il teorema è dimostrato. $\square$

Esempio Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Scrivere esplicitamente l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rappresentata da A rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f$.

c) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im} f$.

Soluzione. a) Poiché A è la matrice canonica di f, abbiamo che

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ -x - 2y - z \\ 2x + 4y + 2z \end{pmatrix}$$

b) Il nucleo si ottiene imponendo $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Otteniamo un sistema lineare omogeneo la cui unica equazione significativa è

$$x + 2y + z = 0.$$

Risolvendo, otteniamo

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} : t, s \in \mathbf{R} \right\}.$$

Poiché

$$\begin{pmatrix} -2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

otteniamo la base di $\mathrm{Ker} f$:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

e dunque $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.

b) Dal teorema della dimensione abbiamo che $\dim \mathrm{Im} f = 1$: dunque una base di $\mathrm{Im} f$ è data da un suo qualunque vettore non nullo, ad esempio

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In effetti, sappiamo che $\mathrm{Im} f$ è generata dalle colonne della sua matrice canonica A:

$$\mathrm{Im} f = L \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right],$$

e tali generatori sono tutti multiplo del primo, che è dunque una base.

Notiamo che f non è né iniettiva né suriettiva. $\square$

Esempio Determinare nucleo e immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche.

Soluzione. Il rango della matrice associata è 3, di conseguenza

$$\dim \mathrm{Im} f = 3$$

e $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}^3$ (spazio di arrivo). Dunque f è suriettiva. Per il teorema della dimensione, si ha

$$\dim \mathrm{Ker} f = 0,$$

dunque f è anche iniettiva. In conclusione, f è biiettiva. $\square$

Esempio Data l'applicazione lineare $f : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definita da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ b-c & a+d \end{pmatrix}$$

determinare basi di Ker$f$ e Imf.

Soluzione. Il nucleo si ottiene imponendo $f(A) = O$. Dunque

$$\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ b-c & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che dà luogo al sistema

$$\begin{cases} a+d=0 \\ b-c=0 \end{cases}.$$

La matrice generica del nucleo è dunque

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e una base del nucleo, la cui dimensione è pari a 2, è

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Consideriamo la base canonica di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$, che scriveremo:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che Imf è generata dalle matrici:

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} f(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema della dimensione, la dimensione dell'immagine è pari a:

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim(\mathbf{Mat}(2 \times 2)) - \dim \mathrm{Ker} f = 4 - 2 = 2,$$

per cui basta selezionare 2 vettori generatori linearmente indipendenti, ad esempio il primo e il secondo. Dunque una base dell'immagine è

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} f(E_1) = E_1 + E_4 \\ f(E_2) = E_2 + E_3 \\ f(E_3) = -E_2 - E_3 \\ f(E_4) = E_1 + E_4 \end{cases}$$

Dunque la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In effetti, $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rk} A = 2$.

Esempio Siano V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e W un secondo spazio vettoriale con base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$. Si consideri l'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = w_1 + w_3 \\ f(v_2) = 2w_1 + w_2 + 3w_3 \\ f(v_3) = w_1 + w_2 + 2w_3 \end{cases}$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

b) Determinare la dimensione di $\mathrm{Ker} f$.

c) Determinare la dimensione di $\mathrm{Im} f$.

Soluzione. Matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Si vede che $\mathrm{rk} A = 2$, da cui $\dim \mathrm{Im} f = 2$ con base $f(v_1), f(v_2)$. Dal teorema della dimensione otteniamo subito che $\dim \mathrm{Ker} f = 1$. □

Proposizione *Sia $f : V^n \to V'^m$ lineare.*

a) *Se f è iniettiva, allora $n \leq m$.*

b) *Se f è suriettiva, allora $n \geq m$.*

c) *Se f è biiettiva, allora $n = m$.*

Dimostrazione. a) È una conseguenza diretta del teorema della dimensione. Infatti, se f è iniettiva la dimensione del nucleo è zero, dunque

$$\dim \mathrm{Im} f = n.$$

D'altra parte, l'immagine di f è un sottospazio di V'^m: dunque

$$\dim \mathrm{Im} f \leq m.$$

In conclusione abbiamo necessariamente

$$n \leq m.$$

L' affermazione b) si dimostra in modo analogo. c) è conseguenza di a) e b). $\square$

10 Isomorfismi

Un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva (quindi biiettiva) si dice un *isomorfismo.* Due spazi vettoriali V, V' si dicono *isomorfi* se esiste almeno un isomorfismo $f : V \to V'$.

Esempio L'applicazione $T : \mathbf{Mat}(m \times n) \to \mathbf{Mat}(n \times m)$ definita da

$$T(A) = A^t$$

per ogni $A \in \mathbf{Mat}(m \times n)$ è lineare, iniettiva e suriettiva (come si verifica subito) dunque è un isomorfismo. Ne segue che $\mathbf{Mat}(m \times n)$ è isomorfo a $\mathbf{Mat}(n \times m)$.

La proposizione seguente mostra che spazi vettoriali isomorfi hanno la stessa struttura; un isomorfismo conserva infatti la proprietà di indipendenza lineare, e la proprietà di generare lo spazio.

Proposizione *Sia $f : V \to V'$ un isomorfismo di spazi vettoriali.*

a) *I vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se i trasformati $f(v_1), \dots, f(v_k) \in V'$ sono linearmente indipendenti.*

b) *I vettori $v_1, \dots, v_k$ generano V se e solo se i trasformati $f(v_1), \dots, f(v_k)$ generano V'.*

c) *f trasforma basi di V in basi di V'.*

d) $\dim V = \dim V'$.

Dimostrazione. a) Supponiamo che $v_1, \dots, v_k$ siano vettori linearmente indipendenti di V, e che si abbia

$$a_1 f(v_1) + \cdots + a_k f(v_k) = O.$$

Poiché f è lineare, otteniamo

$$f(a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k) = O,$$

e per definizione $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k \in \mathrm{Ker}f$. Per ipotesi, f è iniettiva, dunque $\mathrm{Ker}f = \{O\}$. Di conseguenza:

$$a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = O$$

e poiché $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti otteniamo $a_1 = \cdots = a_k = 0$. Dunque $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

In modo analogo si dimostra che se $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

b) Supponiamo che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ generino V. Allora sappiamo che $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ generano $\mathrm{Im}f$. Poiché f è suriettiva, si ha $\mathrm{Im}f = V'$ dunque tali vettori generano anche V'.

Viceversa, supponiamo che $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ generino V', e sia $v \in V$. Allora, poiché $f(v) \in V'$ possiamo scrivere

$$f(v) = a_1f(v_1) + \cdots + a_kf(v_k),$$

con $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}$. Poiché f è lineare:

$$f(v) = f(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k)$$

e, dall'iniettività di f, otteniamo

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k.$$

Ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$, che dunque generano V.

c) Se $(v_1, \ldots, v_k)$ è una base di V, allora i vettori $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti per la parte a) e generano V' per la parte b): dunque $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ formano una base di V'.

d) È immediata dalla parte c). $\square$

Infine, osserviamo che un isomorfismo da V in V' trasforma un sottospazio E di V in un sottospazio E' di V', isomorfo a E.

10.1 Uso delle coordinate

Sia V^n un qualunque spazio vettoriale di dimensione n. Fissiamo una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V e consideriamo l'applicazione $\mathcal{F} : V^n \to \mathbf{R}^n$ definita da:

$$\mathcal{F}(v) = \text{ coordinate di } v \text{ rispetto a } \mathcal{B}.$$

Esplicitamente, se v si esprime, nella base scelta, come combinazione lineare $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$, allora

$$\mathcal{F}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{F}$ è lineare; inoltre $\mathcal{F}$ è iniettiva (vettori distinti hanno coordinate distinte) e suriettiva (per la verifica, applicare il teorema della dimensione a $\mathcal{F}$, sapendo che $\dim \mathrm{Ker}\mathcal{F} = 0$). Dunque $\mathcal{F}$ è un isomorfismo. In particolare abbiamo dimostrato il seguente risultato.

Teorema *Ogni spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a $\mathbf{R}^n$.*

Esempio Lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di n, denotato con $\mathbf{R}^n[x]$, è isomorfo a $\mathbf{R}^n$. Un isomorfismo $\mathcal{F} : \mathbf{R}^n[x] \to \mathbf{R}^n$ si ottiene prendendo le coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^n[x]$:

$$\mathcal{F}(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Esempio Lo spazio vettoriale $\mathbf{Mat}(p \times q)$ ha dimensione pq, ed è dunque isomorfo a $\mathbf{R}^{pq}$.

Possiamo anche dire che $\mathbf{R}^n$ serve come prototipo di tutti gli spazi vettoriali di dimensione n. Usando le coordinate, possiamo trasferire un dato problema da uno spazio vettoriale V^n a $\mathbf{R}^n$, dove il problema può essere risolto con l'aiuto delle matrici, del determinante e del rango.

Un esempio è dato dalla seguente proposizione, già enunciata, ma non dimostrata, nella Parte 5.

Proposizione *Sia V^n uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}$. Allora i vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango della matrice di colonne $\mathcal{F}(v_1), \ldots, \mathcal{F}(v_k)$ è uguale a k.*

Dimostrazione. $\mathcal{F}$ è un isomorfismo; dunque, dalla proposizione del paragrafo precedente, i vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se le rispettive coordinate $\mathcal{F}(v_1), \ldots, \mathcal{F}(v_k)$ sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^n$. Per il criterio del rango, questo avviene se e solo se il rango della matrice di colonne $\mathcal{F}(v_1), \ldots, \mathcal{F}(v_k)$ è uguale a k. $\square$