

## Una proprietà del sottospazio ortogonale $S^\perp$ .

(Supplemento – errata corrige – al testo consigliato, *Itinerario di geometria e algebra lineare*)

Dato un sottospazio  $S \subseteq \mathbf{R}^n$ , sappiamo che il *sottospazio ortogonale*  $S^\perp$  è definito come l'insieme dei vettori ortogonali a qualunque vettore di  $S$ . Tale insieme è un sottospazio perché non è vuoto (contiene almeno lo zero) e per ogni scelta di  $\underline{w} \in S$  e  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  si ha:

$$\underline{u}, \underline{v} \in S^\perp \Rightarrow (\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) \times \underline{w} = \alpha(\underline{u} \times \underline{w}) + \beta(\underline{v} \times \underline{w}) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} \in S^\perp .$$

Evidenziamo ora una proprietà notevole di  $S^\perp$ :

$$(S^\perp)^\perp = S .$$

Forse per comprendere meglio il significato di questa proprietà è utile vedere un esempio in cui essa non vale. Consideriamo due rette perpendicolari,  $r, s$  (passanti per l'origine) in  $\mathbf{R}^3$ . Se scegliamo un vettore  $\underline{h}$  perpendicolare a  $s$ , non è detto che  $\underline{h}$  sia un vettore direttore di  $r$ . L'ortogonalità tra i due sottospazi non basta a garantire la proprietà che stiamo analizzando. Occorre che i due sottospazi siano “saturi” rispetto alla dimensione globale. Infatti, se al posto di  $s$  consideriamo il piano  $\pi$  ortogonale a  $r$ , adesso qualunque vettore ortogonale a  $\pi$  è un vettore direttore di  $r$ .

**Dimostrazione della proprietà  $(S^\perp)^\perp = S$ .** Banalmente,  $(S^\perp)^\perp \supseteq S$ . Infatti ogni vettore di  $S$  è, per definizione di  $S^\perp$ , ortogonale a qualunque vettore di  $S^\perp$ . Non è invece banale dimostrare che  $(S^\perp)^\perp \subseteq S$ . Consideriamo quindi un elemento  $\underline{h} \in (S^\perp)^\perp$ ; scriviamo  $\underline{h}$  come  $\underline{a} + \underline{b}$  dove  $\underline{a} \in S$  e  $\underline{b} \in S^\perp$  (dunque  $\underline{a}$  è la proiezione ortogonale di  $\underline{h}$  su  $S$ ). Ora, per ipotesi, qualunque vettore di  $S^\perp$  è ortogonale a  $\underline{h}$ . Ciò vale in particolare per  $\underline{b}$ . Abbiamo quindi:

$$0 = \underline{b} \times \underline{h} = \underline{b} \times (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{b} \times \underline{a} + \underline{b} \times \underline{b} = 0 + \underline{b} \times \underline{b} ,$$

da cui segue che  $\underline{b} = 0$ ; possiamo dedurre che  $\underline{h} = \underline{a} \in S$ .

Grazie a questa proprietà possiamo essere certi che un vettore ortogonale a tutti i vettori di  $S^\perp$  appartiene a  $S$ ; non è possibile alcuna alternativa –  $S$  lo “cattura”. Come conseguenza, possiamo trovare la proiezione di un vettore  $\underline{z}$  su  $S$  come la differenza  $\underline{z} - \underline{c}$  dove  $\underline{c}$  è invece la proiezione ortogonale di  $\underline{z}$  su  $S^\perp$ . Come abbiamo visto nel caso di due rette ortogonali nello spazio, senza l'ausilio della proprietà appena vista non potremmo essere certi che  $\underline{z} - \underline{c} \in S$ .

Notiamo, infine, che la strategia per dimostrare che due insiemi  $E$  e  $F$  sono uguali è quella di separare la dimostrazione in

$$E \subseteq F \quad , \quad F \subseteq E .$$

Si tratta di un classico metodo, generale, valido per qualunque altro contesto.