**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**

**Geometria**

***Diario delle lezioni (a.a. 2020 - 2021)***

**Mar. 29-09-2020:** Presentazione della modalità di insegnamento simultanea in presenza e a distanza. Prove generali e indicazioni essenziali per la corretta comunicazione tra gli studenti a distanza e il docente.

Breve panoramica sul corso. Geometria e algebra lineare: due approcci matematici connessi. Sistemi in più incognite e geometria: fino a tre incognite è possibile rappresentare geometricamente le equazioni. Geometria nel piano cartesiano. Sistemi lineari. Rette e loro posizioni reciproche. Metodo di Gauss (riduzione a gradini o eliminazione), primi esempi. Cenni ai vettori numerici e alle matrici.

**Mer. 30-09:** Vettori geometrici e vettori numerici. Rappresentazione di un vettore geometrico. I vettori numerici sono versatili; ad es. possono rappresentare anche equazioni. Somma di vettori numerici con due componenti e corrispondente somma dei vettori geometrici (regola del parallelogramma). Moltiplicazione per uno “scalare” (numero) reale. Ulteriori esempi (senza ancora formalizzare il caso generale) di riduzione a gradini (metodo di Gauss). Operazioni con vettori numerici costituiti da tre componenti; tali operazioni corrispondono alla manipolazione di equazioni (metodo di Gauss). Equazioni “inutili” ed equazioni che invece rendono impossibile il sistema (mediante il metodo di Gauss arriviamo a un assurdo). Posizioni reciproche di tre rette in relazione alla soluzione o all’impossibilità di risolvere un dato sistema lineare.

**Gio. 01-10:** Vettori e rette, approfondimenti. Vettore (-b,a) relativo alla direzione di una retta con equazione ax+by+c=0. Equazione cartesiana di una retta passante per due punti dati; essa esprime una condizione di parallelismo tra vettori (il vettore relativo ai due punti fissati, insieme al vettore del punto mobile). Equazioni parametriche di una retta. Passaggio da equazione cartesiana ad equazioni parametriche e viceversa. “Matrice” con due righe corrispondenti a due dati vettori numerici. “Determinante”. Il determinante consente di scrivere l’equazione cartesiana di una retta anche nei casi problematici (con qualche zero). Uguagliandolo a zero stiamo esprimendo la classica legge di proporzionalità.

**Ven. 02-10:** Approfondimenti su vettori e rette. Versori e normalizzazione. Vettori numerici e simbolo **R2** , **R3** , ecc. (prodotto cartesiano). Definizione generale di matrice. Somma di matrici. Moltiplicazione di una matrice per un numero (scalare). Il prodotto di matrici è invece un’operazione non elementare, da definire in seguito. Esercizi su vettori geometrici e rette. Proiezione ortogonale. Il calcolo di tale proiezione è leggermente facilitato dall’uso dei vettori e non è ancora veloce, visto che non abbiamo a disposizione il cosiddetto “prodotto scalare” come operazione fondamentale tra vettori.

**Mar. 06-10:** Introduzione ai concetti di combinazione lineare e base. Spazi vettoriali, primi esempi. Combinazioni lineari di vettori. Basi, primi esempi. I vettori **i** e **j** costituiscono una base dello spazio vettoriale dei vettori geometrici del piano. Vettori generati da altri vettori. Generatori di uno spazio vettoriale strettamente necessari, indispensabili (nessuno è una combinazione lineare degli altri). Equazioni superflue (sono generate da altre equazioni) in un sistema lineare. Eliminazione di equazioni mediante la riduzione a gradini (da completare). La riduzione a gradini agisce sui vettori numerici (righe della matrice) che rappresentano le equazioni. Utilizzo dei parametri in un sistema. Simbolo di “infinito alla *p*” ( p ).

**Mer. 07-10:** Vettori linearmente dipendenti; vettori linearmente indipendenti (caratterizzazione: non è possibile esprimere alcun vettore come combinazione lineare degli altri). Matrice incompleta e matrice completa associate a un sistema lineare. Metodo generale di riduzione a gradini. Pivot. Parametri. Teorema (da dimostrare): il numero di gradini che si ottengono a seguito di una qualunque riduzione a scala è uguale al numero massimo di righe linearmente indipendenti nella matrice iniziale. Rango di una matrice, definito come numero di pivot. Teorema di Rouché-Capelli, prima parte (un sistema è risolubile se e solo se i ranghi delle matrici incompleta e completa coincidono).

**Gio. 08-10:** Sottospazi di uno spazio vettoriale e relativa simbologia. Controllo della chiusura rispetto alla somma e al prodotto con scalari, per decidere se un dato sottoinsieme è un sottospazio. Esempi e controesempi relativi a sottospazi (vettori geometrici, spazi **Rn** , polinomi). Definizioni equivalenti di base, in uno spazio vettoriale generico. L’insieme di vettori generati da un dato insieme di vettori è un sottospazio (esempio di due vettori nello spazio che danno luogo a un piano vettoriale, cenno) – proprietà da dimostrare nella prossima lezione.

**Ven. 09-10:** Sintesi degli argomenti principali trattati fino ad ora, con esercizi e approfondimenti. Il cosiddetto "sottospazio generato da alcuni vettori dati" è di fatto un sottospazio (dimostrazione: soddisfa le due proprietà di chiusura). Operazioni elementari - nella riduzione a gradini di Gauss - e loro coerenza (le equazioni vengono trasformate in equazioni equivalenti, grazie alla reversibilità dell'operazione elementare). Operazioni elementari generali, con coefficienti non banali per entrambe le righe coinvolte. Metodo di Cramer nel caso di due incognite (anche con parametro, quindi eventualmente con tre o più incognite non effettive). La dimostrazione in questo contesto non è difficile, partendo da due equazioni generiche e arrivando appunto alla formula. Con tre o più incognite effettive, quindi con matrici incomplete quadrate di ordine maggiore di 2, la dimostrazione è più complicata; la vedremo. Approfondimenti sulle rette: vettore perpendicolare (a,b); giacitura (essa è un sottospazio, se viene interpretata come insieme di vettori anziché di punti della retta, e questo è lecito perché la giacitura passa per l'origine degli assi).

**Mar. 13-10:** Esercizi e approfondimenti sui sottospazi e sulle basi. Selezione di vettori linearmente indipendenti in un dato insieme di generatori di un sottospazio. Base canonica di **Rn** . Teorema della cardinalità della base (in uno spazio vettoriale, le basi hanno tutte lo stesso numero di elementi, se finito) – da dimostrare. Questo teorema riguarda spazi vettoriali generali; in particolare consente di dimostrare l’invarianza del numero di pivot a seguito di una riduzione a gradini. Metodo “1-0” per determinare probabili vettori generatori in un insieme definito da parametri.

**Mer. 14-10:** Spazi vettoriali costituiti da matrici. Sottospazi di matrici. Matrici diagonali, triangolari, simmetriche. Matrice trasposta. Matrice identità. Prodotto di matrici. Matrici compatibili per il loro prodotto (le colonne della prima sono tante quante le righe della seconda). Matrice inversa e formula nel caso dell’ordine 2.

**Gio. 15-10:** Basi di sottospazi formati da matrici (ad es. matrici simmetriche di ordine 3). Definizione formale del prodotto di due matrici compatibili. Associatività e distributività (rispetto alla somma) relative al prodotto di matrici. Sistemi lineari omogenei. L’insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è un sottospazio (dimostrazione mediante le matrici). Soluzioni di un sistema non omogeneo in relazione al sistema omogeneo (idea della dimostrazione, approfondimento).

**Ven. 16-10:** Rango per righe (massimo numero di righe linearmente indipendenti), equivalente al rango per pivot (teorema da dimostrare). Studio del rango di una matrice al variare di un parametro, esercizi vari. Ricordiamo che il rango può essere interpretato come la dimensione del sottospazio generato dalle righe della matrice. Teorema di Rouché-Capelli, seconda parte, versione generale: il numero di parametri di un sistema lineare risolubile è uguale al numero di incognite meno il rango (i ranghi della matrice incompleta e completa coincidono).

**Mar. 20-10:** Dimostrazione: teorema della cardinalità della base (caso di tre vettori). Dimostrazione: teorema dell'invarianza del numero di pivot. Primi cenni al determinante di una matrice di ordine 3 o superiore.

**Mer. 21-10:** Esercizi e approfondimenti di riepilogo, prima di introdurre la nozione generale di determinante. Sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo: metodo “1-0” per calcolarne una base. Confronto di diversi metodi risolutivi per sistemi lineari. Schematizzazione geometrica di un “piano” in uno spazio di dimensione 4. Punti mobili su una retta (“candidati”) e specifiche aggiuntive.

**Gio. 22-10:** Determinante, definizione mediante il teorema di Laplace. Sottomatrici e complementi algebrici. Prime proprietà (“linearità”, rispetto alla moltiplicazione di una riga o colonna per uno scalare, e rispetto a una riga ottenuta come somma di due vettori). Scambiando due righe, o colonne, il determinante cambia segno (idea della dim. per il caso di due righe consecutive).

**Ven. 23-10:** Una matrice (quadrata) con due righe o due colonne uguali ha determinante nullo. Questo è l’ultimo ingrediente per dimostrare che “una matrice le cui righe sono linearmente dipen­denti ha determinante nullo”. Viceversa, se il determinante è nullo le righe sono linearmente dipendenti, perché se per assurdo fossero indipendenti allora riducendo la matrice a gradini trove­remmo una matrice triangolare senza righe nulle e dunque con determinante diverso da zero (pro­dot­to degli elementi sulla diagonale); questo è un assurdo perché la nullità (o meno) del determinante *si trasmette* attraverso le operazioni elementari (dimostrazione dettagliata), quindi già il determinante ini­ziale sarebbe non nullo.

Queste ultime dimostrazioni forniscono un metodo di calcolo alternativo per il determinante: prima ridurre a scala, poi calcolare il determinante facilmente e infine a ritroso dividere per tutti i coefficienti “alfa” delle operazioni elementari **(nota successiva, 29 ottobre: cambiare segno se il numero degli scambi di riga è dispari)**. Fra l’altro questo metodo è molto più veloce del metodo di Laplace, al crescere della matrice (dimostrazione: approfondimento facoltativo).

Rango “per minori”: esso è il massimo ordine di una sottomatrice che abbia determinante non nullo.

**Mar. 27-10:** Teorema di Binet (senza dimostrazione). Determinante della matrice trasposta (esso resta invariato - idea della dimostrazione mediante il teorema di Laplace applicato a una riga e poi alla colonna corrispondente nella matrice trasposta).

Costruzione della matrice inversa, metodo generale, con la condizione che il determinante della matrice data non sia nullo. Dimostra­zione della correttezza della matrice inversa mediante le proprietà dei complementi algebrici e più in generale con le proprietà del determinante. Non è invece possibile costruire la matrice inversa se il determi­nante è nullo, qualunque sia il metodo tentato (dimostrazione per assurdo, con l’ausilio del teorema di Binet).

**Mer. 28-10:** Orli di una sottomatrice. Teorema degli orlati. Studio del rango di una matrice con parametro, considerando il rango per minori e con l’ausilio del teorema degli orlati. Studio della risolubilità di un sistema (discussione) al variare di un parametro presente nelle equazioni. Argo­mento precedente: punto medio.

**Gio. 29-10:** Rango per colonne e sua equivalenza col rango per righe, in virtù dell’invarianza del determinante per la matrice trasposta. Metodo di Sarrus e cenno alla definizione classica di determinante anche per matrici di ordine superiore a 3. Metodo di Gauss-Jordan per trovare la matrice inversa mediante la doppia riduzione a gradini. Questo metodo, la cui efficienza cresce sempre di più rispetto agli altri metodi, al crescere dell’ordine della matrice, è basato sulla codifica delle operazioni elementari per mezzo di opportune matrici.

**Ven. 30-10:** Geometria dello spazio. Sistema di assi cartesiani tridimensionale. Rappresentazione di punti e vettori nello spazio. Analogia col caso bidimensionale (ad es. la regola del parallelogramma è la stessa, sul versante algebrico, come anche la costruzione del vettore che ha per estremi due punti dati). La “compla­narità” di tre vettori geometrici equivale alla dipendenza lineare dei relativi vettori numerici. Equazione lineare in tre incognite: essa determina un piano. Giacitura. Vettori generatori della giacitura (generatori del sottospazio di dim. 2 in **R3**). Traslazione della giacitura e ruolo del termine noto. Scrittura delle equazioni para­metriche di un piano e passaggio alla forma cartesiana. Equazione cartesiana di un piano passante per tre punti (determinante di una matrice apposita).

**Mar. 03-11:** Equazione generale di un piano, ax+by+cz+d=0. Parallelismo piano-vettore. Stelle di piani (in analogia con i fasci di rette nella geometria bidimensionale). Piani particolari (equazioni contenenti soltanto una incognita). Retta, come intersezione di due piani. Equazioni cartesiane di una retta e trasformazione in equazioni parametriche (risoluzione del relativo sistema, mediante un parametro). Procedimento inverso, da parametriche a cartesiane, per assorbimento del parametro. Vettore direttore di una retta, in simboli (l,m,n), e formula per il suo calcolo (idea della dimo­strazione, mediante una matrice artificiale costruita solo per questa occasione). In realtà il modo più “artigianale” e a volte più veloce per trovare questo vettore o i suoi multipli è vederlo come un punto della giacitura, dunque un punto le cui coordinate soddisfano il relativo sistema omogeneo.

**Mer. 04-11:** Esercizi e approfondimenti su argomenti recenti. Equazioni parametriche di un piano (quindi con due parametri) e successivo assorbimento dei parametri per ottenere un’unica equazione cartesiana. Piano passante per un punto e parallelo a due vettori (determinante di un’opportuna matrice, posto uguale a zero). Equazioni cartesiane di una retta nello spazio, passante per due punti (metodo della proporzionalità tra vettori, oppure passaggio da equazioni parametriche a cartesiane, o infine utilizzo della forma gene­rale della retta per poi specializzare gli 8 coefficienti - cenno). Determinante di una matrice di ordine 4 calcolato col metodo generalizzato di Sarrus - esercizio esplicito. Cenno al metodo di induzione con alcune applicazioni.

**Gio. 05-11:** Posizioni reciproche di piani nello spazio, o di una retta e un piano, in relazione alle varie tipologie di sistemi lineari in tre incognite. Fascio proprio di piani e analogia col fascio proprio di rette nella geometria bidimensionale. Assenza di un piano nel caso di utilizzo di un solo parametro anziché due, nell’equa­zione generica del fascio.

**Ven. 06-11:** Approfondimenti sui fasci di piani. Applicazione del teorema degli orlati alla ricerca di equazioni cartesiane, data una retta passante per due punti assegnati. Piani speciali con traccia nel piano xy (equazioni senza l’incognita z). Posizioni reciproche di due rette nello spazio. Rette sghembe (rette non complanari, non esiste alcun piano che le contenga simultaneamente). Cenno al riconoscimento della posizione reciproca mediante i due ranghi del sistema di 4 equa­zioni.

**Mar. 10-11:** Posizioni reciproche di due rette nello spazio (studio del rango nei 4 casi che si presentano). Nel caso delle rette parallele o sghembe utilizziamo il relativo sistema omogeneo e le diverse intersezioni delle giaciture.

**Mer. 11-11:** Esercizi di riepilogo su rette e piani. Confronto di tecniche e concetti diversi (fasci di piani, vettori direttori, equazioni parametriche, ecc.). Selezione di uno o più punti su una retta espressa in forma cartesiana. Fasci impropri di piani e stelle improprie di rette. Cenno alla geometria proiettiva (ad es. nel modello proiettivo le stelle improprie di rette possono essere considerate stelle proprie).

**Gio. 12-11:** Esercizi e approfondimenti su argomenti recenti.

**Ven. 13-11:** Prodotto scalare tra vettori geometrici e teorema relativo alla formula del coseno. Proiezione ortogonale di un vettore lungo la retta associata a un secondo vettore e legame col prodotto scalare. La dimostrazione della formula del coseno è stata (quasi completamente) svolta per il solo caso bidimensionale, utiliz­zando la proiezione ortogonale. Ortogonalità tra vettori nel caso bi- e tridimensionale (il prodotto scalare è nullo). Cenno alla dimensione maggiore di 3 (prodotto scalare tra vettori nume­rici in qualunque spazio **Rn**). Angolo tra una retta e un vettore (primi esempi di applicazione del teorema dimostrato oggi).

**Mar. 17-11:** Il prodotto scalare consente di rileggere l’equazione di un piano passante per l’origine come una condizione di perpendicolarità: il piano (identificando i suoi punti con i vettori del sottospazio-giacitura) può essere inter­pretato come l’insieme dei vettori perpen­dicolari al vettore (a,b,c), il cosiddetto “vettore normale”. Analogia col vettore normale (a,b) di una retta nel sistema di riferimento Oxy. Metodi vari per il calcolo del coseno dell’angolo tra due piani e dell’angolo tra una retta e un piano. Il prodotto scalare di un vettore per se stesso dà il quadrato del modulo (nota).

**Mer. 18-11:** Esercizi sul prodotto scalare e la perpendicolarità tra vettori, rette, piani nello spazio. Analisi di metodi diversi per calco­lare la distanza tra un punto e una retta.

**Gio. 19-11:** Distanza punto-piano, vari metodi per calcolarla. Formula (con dimostrazione), analoga alla formula per la distanza punto-retta nel piano Oxy. Esercizi sulla distanza punto-piano. Distanza minima tra rette sghembe e costruzione della relativa retta che le interseca perpendicolarmente (vari metodi; manca ancora il metodo della distanza dal “terreno”, da vedere).

**Ven. 20-11:** Calcolo della distanza minima tra rette sghembe, ulteriori metodi (ad es. utilizzando la distanza punto-piano). Prodotto vettoriale. Interpretazione geometrica del vettore direttore (l,m,n) mediante i due piani che definiscono la retta in esame. Definizione geometrica di questo nuovo prodotto tra vettori (convenzione “della mano destra”). Prodotto vettoriale tra coppie di versori degli assi cartesiani. Teorema: formula (l,m,n) per il calcolo del prodotto vettoriale. La dimostra­zione deve essere conclusa e utilizza la proprietà distri­butiva (non dimo­strata; approfondimento facol­ta­tivo). Calcolo di aree di triangoli nello spazio mediante l’utiliz­zo idoneo del prodotto vettoriale.

**Mar. 24-11:** Il prodotto vettoriale tra due vettori coincidenti o anche soltanto proporzionali dà il vettore nullo (il seno dell’angolo sotteso vale 0). Dimostrazione della formula per il prodotto vettoriale. Proiezione ortogonale vettoriale. Coefficiente di Fourier. Componente ortogonale di un vettore rispetto alla direzione data da un altro vettore (differenza tra il primo vettore e la sua proiezione ortogonale rispetto al secondo vettore) . Procedi­mento di Gram-Schmidt per due soli vettori geometrici. Caso di tre vettori, due dei quali già ortogonali, da concludere. Basi ortogonali.

**Mer. 25-11:** Esercizi su proiezioni e componenti ortogonali. Prodotto scalare in uno spazio **Rn** qualunque. Approfondimento, cenno: la disuguaglianza di Schwarz e il coseno in dimensione maggiore di 3. Procedimento di Gram-Schmidt, livello 2 (creazione di un terzo vettore ortogonale, dati due vettori già ortogonali, di una base assegnata – descrizione geometrica nello spazio Oxyz). Utilizzo dei coefficienti di Fourier per il calcolo delle coordinate di un vettore (data una base ortogonale).

**Gio. 26-11:** Basi ortogonali e basi ortonormali. Le basi ortonormali sono utili in particolare perché i coefficienti di Fourier rispetto ai vettori di una tale base hanno denominatore uguale a 1. Sottospa­zio ortogonale S┴ rispetto a un dato sottospazio S. Calcolo della proiezione di un vettore su un sottospazio mediante la proiezione sul sottospazio ortogonale e la successiva sottrazione di tale proiezione dal vettore da proiettare: esempi vari. I coefficienti delle equazioni omogenee (suppo­niamole lin. indipendenti) che definiscono un dato sottospazio S sono proprio le componenti dei vettori di una base del sottospazio ortogonale a S.

**Ven. 27-11:** Esercizi e approfondimenti sull’ortogonalità in spazi **Rn** . Somma diretta di sottospazi: decomposizione di un vettore in modo unico, come somma di due vettori appartenenti ai rispettivi sottospazi. Esempi di sottospazi che non costituiscono una somma diretta (l’intersezione è più grande del solo vettore nullo).

**Mar. 01-12:** Equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di sottospazi di uno spazio **Rn**. Analogia con le equazioni di rette e piani nel riferimento Oxy o Oxyz (passanti per l’origine). Intersezione di sottospazi. Per trovare una base dell’intersezione possiamo utilizzare sia le equazioni cartesiane che (con più facilità) le equazioni parametriche se disponibili.

**Mer. 02-12:** Somma di sottospazi. Esempi vari (polinomi, matrici, vettori geometrici). Intersezione di sottospazi. Formula di Grassmann (la dimostrazione verrà sintetizzata in una delle prossime lezioni).

**Gio. 03-12:** Applicazioni lineari, primi esempi. Controimmagine. Iniettività, suriettività. Comportamento geometrico (caso del piano o dello spazio).

**Ven. 04-12:** Autovettori. Polinomio caratteristico. (argomento da approfondire).

**Mer. 09-12:** Calcolo di autovettori per una matrice di ordine 3. Molteplicità algebrica. Molteplicità geometrica. Teorema spettrale. Nota sugli autovalori: la mancanza di iniettività equivale alla presenza dell’autovalore zero.

**Gio. 10-12:** Matrice di un’applicazione lineare rispetto a due basi assegnate nel dominio e nel codominio. Esempio: derivata di polinomi. Composizione di applicazioni lineari e corrispondente prodotto di matrici. Matrici per il cambiamento di coordinate. Per il cambiamento di coordinate inverso occorre la matrice inversa. Diagonaliz­zazione di un’applicazione lineare mediante una base di autovettori.

**Ven. 11-12:** Approfondimenti sulle applicazioni lineari. Correttezza della matrice di una appli­cazione lineare (essa svolge lo stesso lavoro dell’applicazione lineare che agisce per linearità) – dimostrazione. Matrici per il cambiamento di coordinate: anche queste matrici agiscono per linearità. Nucleo e immagine. L’iniettività equivale alla riduzione del nucleo al solo zero (dimostrazione mediante il teorema di Rouché-Capelli). Dimensione del nucleo e dell’immagine (la somma di queste dimensioni dà la dimensione del dominio). Argomento precedente: formula di Grassmann, cenno della dimostrazione.

**Mar. 15-12:** Nuovo argomento: coniche e riduzione a forma canonica. Utilizzo della diagonaliz­zazione per ruotare il riferimento *Oxy* ed eliminare il monomio in *xy* di un dato polinomio di grado 2 in due variabili. Matrice di ordine 2 associata a un polinomio omogeneo di grado 2. La matrice trasposta è uguale alla matrice inversa nel caso di una matrice del cambiamento di coordinate con autovettori ortogonali (questo accade se la matrice da diago­nalizzare è simmetrica, in virtù del teorema spettrale). Esempio dell’ellisse.

**Mer. 16-12:** Rotazione di una parabola (nota: un autovalore è nullo). Sostituzione diretta dei monomi di grado 1, in aggiunta alla diagonalizzazione che agisce invece sul polinomio di grado 2. Definizioni generali sulle coniche. Eccentricità e classificazione dei tre tipi di conica nella geometria euclidea. Cenno alla geometria proiettiva e all’unificazione delle tre tipologie. Cambiamento di coordinate applicato a fuochi o vertici, con lo scopo di ottenere le coordinate originali; cambiamento di coordinate inverso per ottenere le equazioni originali (direttrici o asintoti).

**Gio. 17-12:** Esercizi e approfondimenti su vari argomenti. Metodo dei determinanti invarianti per trovare la forma canonica di una conica (esempio esplicito della parabola; cenno all’ellisse). Calco­lo algebrico (utilizzando proprietà del prodotto scalare) che dimostra la correttezza del metodo di Gram-Schmidt; caso di due vettori già ortogonali ed un terzo vettore da ortogonalizzare. Nucleo e immagine di applicazioni lineari con matrice non quadrata.

**Ven. 18-12:** Simulazione della prova scritta anche con utilizzo di Exam.net.

**Mar. 22-12:** Seconda simulazione della prova scritta. Termine del corso.