**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**

**Geometria**

***Diario delle lezioni (a.a. 2021 - 2022)***

**Lun. 27-09-2021:** Presentazione del corso e modalità dell’esame. Ruolo essenzialmente formativo dei contenuti di questo corso. Contatti tra geometria e algebra lineare. Cenno alle matrici. Geo­metria del piano cartesiano Oxy. Rette, vettori geometrici, vettori numerici. Scrittura dell’equazione cartesiana di una retta mediante la proporzionalità tra le componenti di vettori geometrici opportuni.

**Mer. 29-09:** Vettori geometrici, matrici quadrate di ordine 2, determinante: un approccio iniziale in relazione alla geometria del piano cartesiano Oxy. Vettore (-b,a) relativo a una retta di equazione ax+by+c=0 e vettore perpendicolare (a,b). I punti di una retta passante per l’origine possono essere interpretati anche come vettori direttori. Vettori proporzionali e relazione col determinante nullo. Punti allineati. Formula del determinante da utilizzare per scrivere l’equazione di una retta passante per due punti.

**Gio. 30-09:** Vettori geometrici e vettori numerici. Spazi Rn . Operazioni con i vettori geometrici: somma di vettori, moltiplicazione per un numero (scalare). Versori e normalizzazione. Equazioni parametriche di una retta (formulazione vettoriale mediante un vettore “spinta” e un vettore “direttore”). Assorbimento del parametro al fine di ottenere un’equazione cartesiana. Processo inverso. Esempio di esercizio con punto parametrico. Sistemi (lineari, cioè di grado 1) di equazioni che rappresentano intersezioni di rette. Primi esempi di relazione tra matrici e sistemi. Matrice incompleta e matrice completa associate a un sistema.

**Ven. 01-10:** Combinazioni lineari di vettori numerici. Eliminazione di un’equazione che risulta essere una combinazione lineare di due altre equazioni (“generata” da tali equazioni). Ricerca dei coefficienti di una combinazione lineare. Metodo alternativo: riduzione a gradini ed eliminazione conseguente di una riga (primi esempi). Riduzione a gradini e sistemi impossibili (rette che formano un triangolo) o sistemi con soluzione parametrica (tre rette coincidenti). Prodotto di una matrice per un vettore (x,y) in colonna (introduzione al prodotto di matrici).

**Lun. 04-10:** Definizione generale di matrice con l’utilizzo del doppio indice. Matrici diagonali, matrici triangolari, matrice identità. Connessione tra sistemi e matrici (incomplete); le matrici triangolari consentono di risolvere age­volmente un sistema. Prodotto di matrici. Associatività del prodotto. Somma di matrici e matrice opposta.

**Mer. 06-10:** Approfondimenti su argomenti esposti nelle lezioni precedenti. Differenza di vettori. Punto medio. Matrice trasposta. Matrici simmetriche. Notazione matriciale M Xt = bt per un dato sistema lineare.

Metodo di Cramer (per ora senza dimostrazione): esso può essere applicato a un sistema con matrice incompleta quadrata purché il suo determinante non sia nullo (analogia con l’equazione kx=h che non è risolubile se k=0). Determinante nel caso generale, primi esempi. Calcolo del determinante per la matrice incompleta 3 × 3 di un dato sistema lineare. Complessità di calcolo del determinante: essa è “molto alta” e sarebbe possibile dimostrare che la complessità della riduzione a gradini è “molto più bassa” (cenno).

**Gio. 07-10:** Riduzione a gradini per un dato sistema lineare (metodo di Gauss). Pivot, gradini, parametri. Teorema fondamentale – lo dimostreremo: il numero di pivot non dipende dalle operazioni effettuate durante la riduzione a gradini. Rango di una matrice (numero invariante di pivot, per una fissata matrice). Se l’ultimo pivot è nella colonna dei termini noti, il sistema non ha soluzione. Teorema di Rouché-Capelli.

**Ven. 08-10:** Reversibilità delle “operazioni elementari” utilizzate nella riduzione a gradini. Discussione di un sistema mediante la riduzione a gradini. Introduzione agli spazi vettoriali e ai sottospazi. Spazi vettoriali Rn. Sottospazio generato da alcuni vettori. Base (insieme di generatori “indispensabili”). Base canonica. Esempi di spazi vettoriali e di sottospazi.

**Lun. 11-10:** Definizione generale di spazio vettoriale e di vettore. Sottospazi e proprietà di chiusura. Spazi vettoriali di matrici o di polinomi. Spazio dei vettori geometrici tridimensionali applicati nell’origine. Dipendenza lineare. Vettori linearmente indipendenti. Base di uno spazio vettoriale - insieme di generatori linearmente indipendenti. Cenno all’iso­morfismo di spazi vetto­riali mediante la corrispondenza dei vettori di basi fissate.

**Mer. 13-10:** Coordinate di un vettore rispetto a una data base e loro unicità. Definizioni equivalenti di base. Teorema della cardinalità delle basi (da dimostrare). Teorema dei pivot (corrispondono alle righe linearmente indipendenti), da dimostrare. Esercizi su basi, generatori, vettori linearmente indi­pendenti, tenendo presenti i due teoremi menzionati.

**Gio. 14-10:** Sottospazio generato da alcuni vettori dati. Dimensione (numero dei vettori di una base qualunque, numero costante in virtù del teorema della cardinalità da dimostrare). Ricerca dei generatori di un sottospazio mediante il metodo “1-0”. Criteri per stabilire che un insieme non è un sottospazio; criterio generale, verificando le proprietà di chiusura eventualmente accorpate, per stabilire che un insieme è al contrario un sottospazio. Eliminazione di generatori superflui. Sistemi omogenei lineari in *n* incognite: le loro soluzioni costituiscono un sottospazio di R*n* (dimostrazione con linguaggio matriciale).

**Ven. 15-10:** Teorema di Rouché-Capelli e dimensione del sottospazio delle soluzioni, dato un sistema lineare omogeneo: il numero di parametri è uguale alla dimensione (metodo 1-0 per dimostrare questa proprietà). Teorema: il numero di pivot è indipendente dalla riduzione a gradini eseguita; esso è infatti uguale alla dimensione del sottospazio generato dalle righe iniziali della matrice. Studio della dimensione di sottospazi generati da vettori dipendenti da un parametro.

**Lun. 18-10:** Determinante. Primo teorema di Laplace. Complementi algebrici. Scambio di righe adiacenti. Linearità. Teorema da dimostrare nelle prossime lezioni: una matrice n × n ha il determinante nullo se e solo se le sue righe (equivalentemente, le sue colonne) sono linearmente dipendenti.

**Mer. 20-10:** Approfondimento: linearità e altre proprietà del determinante. Determinante di matrici triangolari. Determinante della trasposta di una data matrice. Cenno al principio di induzione (strumento essenziale in molte dimostrazioni, come ad esempio quella sul determinante della trasposta). Secondo teorema di Laplace: una matrice con due righe uguali (non necessaria­mente adiacenti) ha il determinante nullo, dimostrazione come approfondimento. Calcolo di deter­minanti con l’utilizzo delle proprietà menzionate.

**Gio. 21-10:** Teorema di Binet (senza dimostrazione). Teorema, con dimostrazione: il determinante di una matrice quadrata è nullo se e solo se le sue righe (o colonne) sono linearmente dipendenti. Questo teorema consiste di due sotto-teoremi corrispondenti alle due implicazioni nei due versi. Una è semplice da dimostrare (linearità e secondo teorema di Laplace), l’altra viene dimostrata con l’ausilio dei pivot (interazione tra il metodo di Gauss e il determinante: le operazioni elementari modificano il determinante ma non la sua nullità o non-nullità). Esempi di calcolo di determinanti mediante la riduzione a scalini (prendendo nota delle operazioni effettuate) o metodo ibrido, con lo sviluppo lungo una riga o colonna a seguito della riduzione parziale. Sottomatrici di una matrice anche rettangolare e calcolo del rango come massimo ordine di una sottomatrice con determinante non nullo (rango “per minori”).

**Ven. 22-10:** Orli di una sottomatrice. Calcolo del rango per minori facilitato dal teorema degli orlati (di Kronecker). Studio del rango di una matrice al variare di un parametro, mediante il rango per minori. Matrice inversa, primi esempi e definizione generale mediante i complementi algebrici.

**Lun. 25-10:** Teorema di Rouché-Capelli, versione con rango per minori. Eliminazione di equazioni e scelta dei parametri mediante lo studio del rango per minori. Formula di Cramer, anche parametrica, ottenuta mediante la moltiplicazione per la matrice inversa eventualmente applicata a matrici quadrate più piccole (se il rango non è massimo).

**Mer. 27-10:** Approfondimenti sulla matrice inversa e sul metodo di Cramer. Una matrice con determinante nullo non ammette inversa (dimostrazione per assurdo mediante il teorema di Binet). Regola di Sarrus (definizione originale di determinante); cenno al caso generale per matrici di ordine superiore a 3. Cenno alla doppia riduzione a gradini per il calcolo dell’inversa (da vedere in dettaglio nelle prossime lezioni). Ulteriore definizione equivalente di rango: rango per colonne (massimo numero di colonne linearmente indi­pendenti). Sistemi omogenei, approfondimento: il rango della matrice incompleta è in ogni caso uguale a quello della completa.

**Gio. 28-10:** Dimostrazione del metodo di calcolo per la matrice inversa. Dimostrazione di un “vecchio” teorema, utilizzato in diverse occasioni nelle precedenti lezioni: le basi di un dato spazio vettoriale hanno tutte la stessa cardinalità, se finita (“dimensione” dello spazio).

**Ven. 29-10:** Geometria dello spazio, introduzione. Funzioni dal dominio R2 al codominio R1 e loro rappresentazione mediante il grafico in un riferimento tridimensionale Oxyz. Equazioni lineari in tre incognite: interpretazione geometrica come equazioni di piani nello spazio coordinato Oxyz. Funzioni generali e cenno alla geometria differenziale per un approccio “locale” allo studio di superfici non piane. Piani speciali (lasciano la traccia sul “piano Oxy” ad altezza 0). Troncamento del termine noto per le equazioni lineari non omogenee e studio del relativo sottospazio. Giacitura e “vettore spinta” (analogia con le rette nel piano Oxy).

**Mer. 03-11:** Equazioni parametriche di un piano e assorbimento dei due parametri per trovare un’equazione cartesiana. Vettore parallelo a un piano (esso soddisfa l’equazione della giacitura, quindi occorre troncare il termine noto nell’equazione cartesiana). Vettori complanari e dipendenza lineare. Metodo del deter­minan­te per ottenere un’equazione cartesiana. (questi argomenti verranno approfonditi nelle pros­sime lezioni.)

Vecchio argomento: matrice inversa. Nuovo metodo di calcolo mediante la doppia riduzione a gradini (manca ancora la dimostrazione mediante la sequenza di prodotti a sinistra). Esempio minimo, con una matrice 2 per 2.

**Gio. 04-11:** Metodo del determinante: caso del piano passante per tre punti. Costruzione di un’e­quazione del piano avente determinate specifiche, mediante l’equazione generale ax+by+cz+d=0. Retta nello spazio (intersezione di due piani). Equazioni parametriche di una retta e assorbimento del parametro al fine di ottenere due (attenzione, non una) equazioni cartesiane. Costruzione delle equazioni cartesiane mediante la proporzionalità tra vettori.

**Ven. 05-11 (13.00 – 15.00):** Esercizi su argomenti recenti: rango, teorema degli orlati, discussioni, equazioni di piani e di rette nello spazio.

Ricerca di punti su una data retta e risoluzione del relativo sistema. Metodi vari per trovare tali punti. Posizioni reciproche di piani nello spazio, o di un piano e una retta (argomenti da riprendere nelle prossime lezioni.

**Lun. 08-11:** Metodo dei minori per trovare equazioni cartesiane di una retta passante per due punti assegnati. Riduzione a gradini sempre con l’obiettivo di far scendere a 1 il rango di una matrice opportuna 2 per 3. La diminuzione del rango è un concetto valido anche per l’equazione di un piano e già per l’equazione di una retta nel piano Oxy, come anche per equazioni cartesiane di sottospazi generali in spazi di dimensione maggiore di 3. Cenno alla *codimensione* (numero di equazioni necessarie per identificare un sottospazio). Vettore direttore di una retta (soluzione del relativo sistema omogeneo). Passaggio alla forma parametrica (risoluzione del sistema) ed estrapolazione di un vettore direttore. Formula con i tre determinanti (da dimostrare nelle prossime lezioni). Parallelismo retta-piano (la matrice incompleta e la completa hanno ranghi diversi, 2 < 3).

**Mer. 10-11:** Approfondimenti su rette e piani. Simbolo del vettore direttore (l,m,n) di una retta nello spazio Oxyz e analogia col vettore (-b,a) di una retta nel piano Oxy: entrambi sono soluzioni (a meno di un fattore parametrico) del corrispondente sistema omogeneo costituito risp. da due o da una sola equazione. Soluzioni di un sistema lineare: decomposizione in soluzione della parte omogenea più una soluzione particolare – caso esplicito di una retta nello spazio. Nuovo strumento: fasci (propri) di piani. Analogia con i fasci propri di rette nel piano Oxy. Utilizzo del singolo parametro al posto dei due parametri: pro e contro.

**Gio. 11-11:** I quattro casi per le posizioni reciproche tra due rette nello spazio - dimostrazione, con particolare enfasi sul ruolo delle giaciture per le rette parallele e per le cosiddette rette “sghembe” (non complanari). Metodo dei tre vettori per stabilire se due rette sono sghembe (è utile se le rette sono date in forma parametrica). Dimostrazione della validità per la formula del vettore diret­tore (l,m,n) di una retta data in forma cartesiana, con la conseguente generalizzazione ad ogni sistema lineare omogeneo di n equazioni in n+1 incognite (cenno). Problemi più complessi di geometria dello spazio (ricerca delle equazioni cartesiane di una retta con particolari specifiche).

**Ven. 12-11:** Utilizzo dei fasci di piani (anche i cosiddetti fasci “impropri” di piani paralleli) per risolvere un problema relativamente complesso di geometria dello spazio. Nuovo argomento: prodotto scalare e coseno, primi esempi. Angoli tra vettori, nel piano o nello spazio. Definizione di prodotto scalare e formula del coseno (da dimostrare nelle prossime lezioni). Il prodotto scalare nullo corrisponde quindi a un angolo di 90 gradi. Rilettura dell’equazione di una giacitura (piano) come condizione di perpendicolarità e conseguente “scoperta” del vettore perpendicolare (a,b,c) o “vettore normale”. Analogia col vettore normale (a,b) di una retta nel piano Oxy.

**Lun. 15-11:** Proiezione ortogonale di un vettore rispetto a un altro (variazione della formula del coseno). Dimostrazione della formula del coseno (caso bidimensionale) con cenno al caso tridimen­sionale, considerando la proiezione ortogonale. Coseno dell’angolo tra due piani, metodo della sezione e metodo dei vettori normali. Coseno dell’angolo tra una retta e un piano, metodo del piano proiettante e metodo del vettore normale (attenzione, in quest’ultimo caso emerge il coseno dell’angolo *complementare*).

**Mer. 17-11:** Distanze tra enti geometrici, utilizzo di metodi vari. Distanza punto-piano, dimostrazione della formula e analogia con la formula della distanza punto-retta nel riferimento bidimensionale Oxy. La distanza punto-retta nello spazio rimanda a una formula meno agevole (non trattata nel corso) e viene invece utilizzato il metodo più “artigianale”, mediante la sezione con un piano perpendicolare alla retta e passante per il punto. Distanza tra rette parallele. Distanza (minima) tra rette sghembe e retta che realizza tale distanza (perpendicolare comune), vari approcci per le risoluzioni.

**Gio. 18-11:** Prodotto scalare in spazi Rn qualunque. Vettori numerici perpendicolari. Disugua­glianza di Schwarz (dimostrazione come approfondimento facoltativo) e coseno generalizzato. Ultimo argomento importante nella geometria dello spazio: prodotto vettoriale “**˄**” e area di un triangolo nello spazio. Dimostrazione della formula per calcolare il prodotto vettoriale (assumendo valida la distributività).

Nuovo argomento (primi cenni): funzioni (o applicazioni) lineari. La risoluzione di un’equazione equivale alla ricerca della “controimmagine” di una funzione. Generalizzando, la risoluzione di un sistema sottin­tende la presenza di una funzione da uno spazio Rn a un altro. Un sistema lineare sottintende una cosiddetta “funzione lineare” che trasporta l’informazione dal “dominio” al “codo­minio”.

**Ven. 19-11:** Approfondimenti sul prodotto vettoriale. Interpretazione del vettore direttore (l,m,n) come prodotto vettoriale di due vettori perpendicolari alla retta (vettori normali dei due piani che definiscono la retta).

Definizione generale di applicazione lineare tra spazi vettoriali. Applicazioni lineari da R a R. Relazione tra un sistema lineare e la relativa applicazione lineare (parte omogenea). Immagini e controimmagini. La giacitura è la controimmagine dello zero (vettore nullo). Esempio esplicito: una retta nello spazio (dominio) è l’insieme delle controimmagini di un punto nel piano (codominio) che rappre­senta i termini noti del sistema. Inoltre, al variare dei punti del codominio otteniamo tutte e sole le rette parallele alla retta iniziale, nel dominio, perché variano i termini noti.

Opinioni degli studenti: l’ultimo quarto d’ora è stato dedicato alla compilazione del questionario OPIS.

**Lun. 22-11:** Applicazioni lineari tra spazi Rn . Matrice di un’applicazione lineare (caso elemen­tare). Applicazioni (lineari) iniettive, applicazioni suriettive; relazione col rango della matrice che rappresenta la funzione. Autovettori e autovalori, primi esempi e rappresentazione grafica di un caso in dimensione 2.

**Mer. 24-11:** Metodo di calcolo degli autovettori (esempio di una matrice 2 per 2). Autospazi. Caso dell’assenza di autovettori. Caso di un solo autovettore (a meno di fattori). Autovalore nullo e collasso di una retta (autospazio relativo all’autovalore nullo) nell’origine.

**Gio. 25-11:** Diagonalizzazione di una matrice n × n mediante gli autovettori (purché ne esistano n linearmente indipendenti). Schema geometrico del cambiamento di coordinate (primi cenni), caso bidimensionale. Molteplicità algebrica e molte­plicità geometrica di un autovalore.

**Ven. 26-11:** Matrice del cambiamento di coordinate e schema generale, data un’applicazione lineare. Nucleo di un’applica­zione lineare (esso è un sottospazio: esame del caso Rn). Anche l’immagine è un sottospazio (ma è contenuto nel codominio): i generatori dell’immagine di un’ap­plica­zione lineare sono le immagini di una qualunque base del dominio (caso della base canonica per spazi Rn ; dimostrazione generale da vedere). Esercizi di approfondimento su autovettori e applicazioni lineari.

**Lun. 29-11:** **Sostituzione: lezione di chimica.**

**Mer. 01-12:** Approfondimenti vari sulle applicazioni lineari. Matrice di un’applicazione lineare, definizione generale per qualunque spazio vettoriale. Trasformazione di una matrice mediante le matrici del cambiamento di coordinate. Nucleo: relazione con l’iniettività. Il nucleo è un sottospazio (dimostrazione intrinseca, senza considerare il rango di un idoneo sistema omogeneo).

Esempio di diagonalizzazione in cui un singolo autovalore conduce a due autovettori linearmente indipen­denti (le due molteplicità infatti coincidono, sono uguali a 2).

**Gio. 02-12:** (disguido con l’audio) Proiezione ortogonale vettoriale. Proiezione su un piano mediante le due singole proiezioni rispetto a una data base (i due vettori del piano devono essere ortogonali). Coefficienti di Fourier. Componente ortogo­nale. Ortogonaliz­zazione di una base in dimensione 2 (modifica di un vettore rispetto all’altro, sottraendo la proiezione).

**Ven. 03-12:** (disguido con l’audio da remoto) Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Costruzione di vettori ortogonali a un dato sottospazio. Equazioni cartesiane del “sottospazio ortogonale” a un dato sottospazio. Equazioni cartesiane di un sottospazio, a partire da una base (da continuare).

**Lun. 06-12:** Equazioni cartesiane di sottospazi in Rn, equazioni parametriche e passaggio per assorbimento, da parametriche a cartesiane. Equazioni cartesiane e vettori ortogonali (analogia col vettore (a,b,c) di un piano di equazione ax+by+cz=0). Dimostrazione algebrica della validità dell’ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (esempio: secondo livello, con tre vettori). Intersezione di sottospazi: sistema con le equazioni cartesiane o (senza la necessità di tali equazioni) ricerca di vettori comuni alle due forme parametriche.

**Gio. 09-12:** Somma di sottospazi. Unione, intersezione. Somma diretta. Formula di Grassmann (idea della dimostrazione, lasciando come approfondimento l’indipendenza lineare dei generatori della somma). Esempio della somma diretta di un sottospazio e del rispettivo sottospazio ortogonale.

**Ven. 10-12:** Decomposizione di un vettore come proiezione e componente ortogonale rispetto a un dato sottospazio. Unicità della decomposizione (è un caso particolare dell’unicità che sussiste nel caso di somma diretta di sottospazi). Proiezione sul sottospazio ortogonale (e successiva sottrazione dal vettore!) come metodo alternativo per calcolare la proiezione ortogonale. Coordinate di un vet­tore rispetto a una base ortogonale: esse sono proprio i coefficienti di Fourier. Questa fondamentale proprietà consente di evitare lunghi calcoli nell’intento di trovare le coordinate.

**Lun. 13-12:** Coniche ed esempi di riduzione alla forma canonica. Ellisse. Definizione mediante i due fuochi e conseguente forma canonica cartesiana. Matrice associata a un trinomio di secondo grado. Rotazione del riferimento a partire dall’equazione di un’ellisse ruotata. Teorema spettrale e diagonalizzazione mediante la matrice trasposta. Parabola, primi cenni (un autovalore vale zero).

**Mer. 15-12:** Rotazione di una parabola con sostituzione del monomio (o dei due monomi) di primo grado in aggiunta alla diagonalizzazione. Esempio di trasformazione delle coordinate di un punto (vertice) dal nuovo riferimento a quello originale, mediante le formule della rotazione. La formula inversa è invece utilizzata per trasformare *equazioni, più precisamente le nuove variabili X, Y,* riportandole nel riferimento originale O*xy.* Definizione di parabola, ellisse, iperbole mediante piani secanti opportunamente un cono infinito a due falde.

**Gio. 16-12:** Metodo degli invarianti per ottenere la forma canonica di una conica. Cenno alle traslazioni. Definizione di ellisse e di iperbole mediante la direttrice e il fuoco. Eccentricità.

**Ven. 17-12 (13.00 – 15.00):** Approfondimenti vari, conclusivi. Matrice di un’applicazione lineare, dettagli sulla sua validità. Determinante della matrice di ordine 2 di una conica: il segno (o la nullità) determina il tipo. Quadriche (cenni); punti ellittici e punti iperbolici. Sfera. Termine del corso. (Le ultime due lezioni saranno dedicate interamente alla risoluzione di esercizi o chiarimenti su qualunque argo­mento del corso, su richiesta.)

**Lun. 20-12:** Esercizi di riepilogo. Discussioni di sistemi parametrici e interpretazione geo­­met­ri­ca. Applicazioni lineari: iniettività, suriettività, nucleo. Basi di sottospazi. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

**Mer. 22-12:** Esercizi di riepilogo. Somma diretta, equazioni di sottospazi, assorbimento dei parametri. Esercizi di geometria dello spazio risolubili con i fasci di piani.

**-------------------------------------------------------------**