

# E s e r c i z i

di algebra lineare e geometria

Andrea Vietri

Sapienza Università di Roma

A.A. 2021 - 2022

# Argomenti

- p. 3      Matrici
- p. 4      Spazi vettoriali, rango, sottospazi
- p. 6      Geometria del piano
- p. 7      Geometria dello spazio
- p. 10     Sistemi, discussioni, interpretazione geometrica
- p. 12     Applicazioni lineari, autovettori, nuove coordinate
- p. 15     Ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi
- p. 17     Coniche e complementi

**I****Matrici**

**Es. 1.** Calcolare le inverse delle matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7\pi & 0 \\ 0 & 0 & 123 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Es. 2.** Date le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , calcolare  $CA + B^{-1}$ .

Verificare poi il teorema di Binet nel caso del prodotto  $B \cdot B$ .

**Es. 3.** Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare i 5 rispettivi ranghi. Calcolare  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$  purché ciò sia possibile. Dei prodotti  $AC$ ,  $AD$ ,  $CA$ ,  $DA$  calcolare solo quelli leciti.

**Es. 4.** Calcolare il determinante di  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Es. 5.** Calcolare il determinante del prodotto  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Es. 6.** Calcolare

$$\begin{vmatrix} 2 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ \sqrt{3} & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

utilizzando la definizione originale di determinante.

**Es. 7.** Dimostrare che l'inversa di una matrice – se esiste – è unica.

**Es. 8.** Dimostrare che l'inversa di una matrice triangolare inferiore (invertibile) è triangolare inferiore.

**Es. 9.** Esibire, mediante opportuni parametri, tutte le matrici  $M \in \mathcal{M}_{2,2}$  tali che  $M^2 = I_2$  e tutte le matrici  $N \in \mathcal{M}_{2,2}$  tali che  $N^2$  sia la matrice nulla.

**II****Spazi vettoriali, rango, sottospazi**

**Es. 10.** Calcolare il rango di  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \end{pmatrix}$  al variare di  $T$  in  $\mathbf{R}$ .

**Es. 11.** Calcolare il rango di  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T \\ T & 0 & T & T \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  al variare di  $T$  in  $\mathbf{R}$ .

**Es. 12.** Calcolare il rango di  $\begin{pmatrix} T & 1 & 8 & T \\ T & 1 & 8 & 1 \\ 2T & 2 & 16 & 2 \end{pmatrix}$  al variare di  $T$  in  $\mathbf{R}$ .

**Es. 13.** Calcolare il rango di  $\begin{pmatrix} T & 1 & 0 & 2 \\ 1 & T & 0 & 2 \\ 0 & 1 & T & 3 \end{pmatrix}$  al variare di  $T$  in  $\mathbf{R}$ .

**Es. 14.** Calcolare il rango di  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 16 & 0 \\ 8 & 1 & 17 & 7 \end{pmatrix}$ .

**Es. 15.** Determinare i valori di  $k$  tali che il sottospazio  $\langle (1, 1, 0, k), (1, k, 0, 1), (k, -1, 3, 0) \rangle$  abbia dimensione 2.

**Es. 16.** Determinare i valori di  $k$  che rendono linearmente dipendenti i vettori  $(1, 1, 1, 2, k)$ ,  $(k, 1, 3, 3, -2)$ ,  $(7, 3, k, 7, 8)$ .

**Es. 17.** Dimostrare che

$$S = \{(a + 3b - c, 2a + c, 3a + b + c) : a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

è un sottospazio di  $\mathbf{R}^3$  e determinarne una base.

**Es. 18.** Dimostrare che l'insieme  $\mathcal{S} = \{(a + b + c + d, a, a, b - d) : a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$  è un sottospazio di  $\mathbf{R}^4$  e determinarne una base.

**Es. 19.** Dati tre vettori linearmente indipendenti  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  di uno spazio vettoriale, dimostrare che  $\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$ ,  $2\underline{v} + 3\underline{w}$  sono linearmente indipendenti e che invece  $\underline{u} - \underline{v}$ ,  $\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ ,  $\underline{u} - 3\underline{v} - \underline{w}$  non lo sono.

**Es. 20.** Esibire una base dello spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche  $3 \times 3$ .

**Es. 21.** Determinare una base dello spazio vettoriale dei polinomi  $p(t)$  a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 4.

**Es. 22.** Dimostrare che l'insieme delle funzioni – sia esso  $\mathcal{M}$  – da un insieme generico  $T$  a uno spazio vettoriale  $V$  (sul campo reale), una volta munito delle operazioni di *somma di due funzioni* e di *prodotto di una funzione per uno scalare* diventa uno spazio vettoriale. Nota: la *somma* delle funzioni  $f$  e  $g$  è la funzione  $f +_{\mathcal{M}} g$  che associa a un elemento  $t \in T$  l'immagine  $f(t) + g(t)$ ; per brevità possiamo utilizzare lo stesso simbolo  $+$ , ma ricordiamo che le due somme sono definite su insiemi diversi. Il *prodotto con uno scalare*  $\alpha \cdot f$  associa a un elemento  $t$  l'immagine  $\alpha \cdot f(t)$  (anche in questo caso dovremmo scrivere per esteso  $\alpha \cdot_{\mathcal{M}} f$ , per il primo prodotto).

**Es. 23.** Dimostrare che l'insieme delle funzioni derivabili, da  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{R}$ , è uno spazio vettoriale. I polinomi di grado minore o uguale a 4 formano un sottospazio di tale spazio vettoriale? E i polinomi di grado pari?

**Es. 24.** Dimostrare che l'insieme  $W$  ottenuto privando  $\mathbf{R}^2$  del vettore  $(2, 3)$ , non è più uno spazio vettoriale (rispetto alle consuete operazioni). Fornire un esempio di sottospazio di  $\mathbf{R}^2$  che sia contenuto in  $W$  e sia *massimale* – dunque non deve essere contenuto in altri sottospazi che siano contenuti in  $W$ .

**Es. 25.** Sia  $\mathbf{Q}^2$  l'insieme dei vettori  $(p, q) \in \mathbf{R}^2$  le cui componenti sono numeri razionali. Dimostrare che tale insieme non è uno spazio vettoriale “sui numeri reali” (dunque rispetto al prodotto con scalari reali).

**Es. 26.** Dimostrare che l'insieme dei numeri complessi,  $\mathbf{C}$ , munito dell'usuale operazione di somma e dell'operazione di prodotto con scalari reali, è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali. Determinarne poi una base.

**Es. 27.** Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per  $(8, 0)$  e  $(8, 3)$ , poi un'equazione della retta passante per  $(3, 3)$  e  $(-30, -30)$ .

**Es. 28.** Data la retta  $r$  di equazione  $3x + 4y + 7 = 0$ , determinare un'equazione cartesiana della retta parallela a  $r$  e passante per  $(8, -2)$ . Determinare poi un'equazione cartesiana della retta perpendicolare a  $r$  e passante per  $(0, 2)$ .

**Es. 29.** Che differenza c'è tra il *punto*  $(7, 9)$  e il *vettore*  $(7, 9)$ ?

**Es. 30.** Rappresentare graficamente la retta  $r$  descritta in forma parametrica come  $x = 6t + 2$ ,  $y = 7t - 4$ . Stabilire se i punti  $(20, 17)$  e  $(20, 18)$  appartengono a  $r$ . Scrivere poi una forma cartesiana di  $r$ .

**Es. 31.** Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche della retta  $r$  passante per  $(4, 1)$  e parallela all'asse  $x$ . Determinare i punti di  $r$  che hanno distanza  $\sqrt{1300}$  dalla retta di equazione  $2x + 3y + 5 = 0$ .

**Es. 32.** Calcolare la proiezione ortogonale (scalare non negativo) del vettore  $(8, 9)$  sulla retta  $r : x - 3y + 102 = 0$ .

**Es. 33.** Calcolare la distanza tra il punto  $(8, 9)$  e la retta di equazione  $y = 2x - 1$ . Inoltre, su tale retta determinare i punti aventi distanza 10 da  $(4, 3)$ .

**Es. 34.** Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni  $y = 3x - 1$  e  $x = 3y - 3$ .

**IV****Geometria dello spazio**

**Es. 35.** Stabilire se i punti  $A : (-3\pi, 1, 5)$ ,  $B : (0, 3, 5)$  e  $C : (9\pi, 9, 6)$  sono allineati. Stabilire se essi sono complanari.

**Es. 36.** Stabilire se i punti  $(\sqrt{2}, 2, 3)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(\sqrt{2}, 1, 0)$  sono allineati. Stabilire se tali punti, insieme a  $(0, 0, 1)$ , sono complanari.

**Es. 37.** Scrivere un'equazione del piano passante per  $(0, 1, 0)$ ,  $(-1, -2, -3)$  e parallelo al vettore  $(0, 2, 1)$ .

**Es. 38.** Determinare un'equazione del piano contenente l'asse  $x$  e passante per  $(4, 4, 7)$ .

**Es. 39.** Determinare  $e$  in modo che il punto  $A = (1, 2, e)$  giaccia nel piano contenente l'origine e i punti  $B = (1, 1, 1)$ ,  $C = (3, 2, 1)$ . Successivamente scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo all'asse  $y$  e contenente i punti  $B, C$ .

**Es. 40.** Descrivere con un'unica equazione cartesiana (dipendente da parametri) la totalità dei piani passanti per il punto  $P = (9, 8, 7)$ .

**Es. 41.** Scrivere equazioni cartesiane della retta avente equazioni parametriche:  $x = 3t - 1$ ,  $y = 3t + 1$ ,  $z = 8$ . Stabilire se essa è contenuta nel piano  $\pi : x + 1 = 0$ .

**Es. 42.** Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per  $(8, 2, 3)$  e parallela al vettore  $(0, 3, 1)$ .

**Es. 43.** Tra i piani passanti per  $(1, 1, 1)$  e  $(0, 0, 1)$  determinare quello parallelo alla retta  $r : x - y - 5 = y + z + 4 = 0$ .

**Es. 44.** Stabilire se esistono valori di  $k$  tali che il piano  $\pi : x + 2y + kz = 4$  sia parallelo alla retta  $\rho : x + y - 3 = y + z - 1 = 0$  (e non la contenga).

**Es. 45.** Determinare equazioni cartesiane, e anche parametriche, della retta passante per  $(8, 0, 1)$  e parallela al vettore  $(0, 10, 0)$ .

**Es. 46.** Scrivere equazioni parametriche della retta  $r$  passante per  $A = (1, 2, 3)$  e  $B = (3, 4, -5)$ . Utilizzando tali equazioni, aggiungere una condizione per descrivere parametricamente il *segmento*  $AB$ .

**Es. 47.** Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per  $P : (1, 2, 0)$ , incidente la retta  $s : x - y = y - z - 1 = 0$  e parallela al piano  $\pi : 3x - z = 4$ .

**Es. 48.** Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per  $P(1, 1, 1)$ , incidente l'asse  $z$  e parallela al piano di equazione  $x - 2y + 3z - 4 = 0$ .

**Es. 49.** Determinare equazioni cartesiane della retta incidente le rette  $r : x - 1 = y - 1 = 0$ ,  $s : x + 2z = y + z + 1 = 0$  e passante per l'origine.

**Es. 50.** Stabilire se il piano di equazione  $x - y = 1$  è parallelo alla retta passante per l'origine e per  $(1, 2, 3)$ .

**Es. 51.** Stabilire se le rette  $\rho : x + y = x + z - 1 = 0$ ,  $\sigma : x + y = x - z = 0$ ,  $\tau : 2x + y - z = y + z = 0$  giacciono in un piano comune.

**Es. 52.** Determinare equazioni cartesiane dei piani contenenti la retta  $r : x = y - z = 0$  e distanti 1 dal punto  $A(0, 0, 3)$ .

**Es. 53.** Dopo aver verificato che le rette  $r : x = z - 2 = 0$  e  $s : x + y = y - 4 = 0$  sono sghembe, scrivere equazioni cartesiane della retta che le interseca perpendicolarmente.

**Es. 54.** Calcolare la distanza tra il piano  $\pi : x - 4y = 9$  e il punto d'intersezione tra l'asse  $y$  e la retta di equazioni parametriche:  $x = t, y = t + 1, z = t$ .

**Es. 55.** Stabilire se il vettore  $(4, 5, 1)$  e la retta  $r : x - y = y - 2z - 3 = 0$  formano un angolo di 60 gradi.

**Es. 56.** Dopo aver verificato che le rette  $r : x + y = y + z + 1 = 0$ ,  $s : x + 2y + z - 8 = x - z - 9 = 0$  sono parallele, calcolare la loro distanza.

**Es. 57.** Tra i piani perpendicolari alla retta  $r : x - y - z = x + y + z - 5 = 0$ , determinare quello passante per il punto  $(8, 8, 9)$ .

**Es. 58.** Tra i piani contenenti l'asse  $x$ , determinare (con un'equazione cartesiana) quelli che formano un angolo di  $45^\circ$  col piano  $\pi : 2x + 3y - 4z - 2 = 0$ .

**Es. 59.** Stabilire se le rette  $r$  e  $s$ , espresse in forma parametrica come  $r : (2 + t, -t, 3)$  e  $s : (t + 1, t - 1, 2t + 1)$  sono sghembe. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente la direzione perpendicolare a entrambe le rette date, e passante per  $(1, 2, 3)$ .

**Es. 60.** In un riferimento  $Oxyz$  è data la retta  $r : x - y + 2 = 2x + y + z - 4 = 0$ . Descrivere mediante un sistema di equazioni cartesiane la totalità delle rette perpendicolari a  $r$  e passanti per  $P = (1, 3, -1)$ . Successivamente risolvere lo stesso problema con la condizione che le rette formino un angolo di  $60^\circ$  con  $r$ .

**Es. 61.** Scrivere equazioni cartesiane della retta che interseca le rette  $r : x = y = 0$  e  $r' : x - 3 = z = 0$  formando angoli di  $60^\circ$  con ciascuna retta.

**Es. 62.** Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per l'intersezione dei tre piani  $\pi_1 : x - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : x + y = 2$ ,  $\pi_3 : y - z = 8$  e perpendicolare a  $\pi_3$ .

**Es. 63.** Tra i punti della retta  $r : x + z + 4 = x + y + z - 1 = 0$ , determinare quelli distanti 5 dal piano  $\alpha : x - z = 10$ , poi quelli distanti 5 dal punto  $(-2, 1, 1)$ .

**Es. 64.** Calcolare il coseno positivo dell'angolo  $\theta$  formato dall'asse  $x$  con la retta di equazione  $x - 3y = y - z + 3 = 0$ . Stabilire se  $\theta$  è minore di 60 gradi.

**Es. 65.** Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dai piani  $\pi : x + y = 8$  e  $\pi' : x + 2y - 4z = 9$ .



**Es. 66.** Determinare la distanza tra le rette (parallele)  $s : x + y + 2z = x - 3 = 0$  e  $s' : y + 2z + 8 = x - 4 = 0$ .

**Es. 67.** Verificare che le seguenti rette,  $r$  e  $s$ , sono parallele:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Calcolare poi il coseno ( $\geq 0$ ) dell'angolo formato da  $r$  col vettore  $\vec{i} - 3\vec{k}$ .

**Es. 68.** Scrivere un'equazione del piano passante per  $(8, 4, 2)$  e perpendicolare sia al piano  $\alpha : x = 2$  che al piano  $\beta : x + y + z = 5$ . Stabilire se la retta  $r : x - z = y + 2z + 9 = 0$  è parallela a  $\beta$ .

**Es. 69.** Scrivere un'equazione del piano passante per  $(0, 1, 0)$  e perpendicolare al vettore  $(2, 4, 5)$ . Determinare il coseno dell'angolo formato da tale piano col piano di equazione  $z = 56$ , e il coseno dell'angolo formato con l'asse  $y$ .

**Es. 70.** Scrivere equazioni cartesiane della retta che taglia perpendicolarmente l'asse  $y$  e la retta  $r : x - y = x + y + 2z + 1 = 0$ . Calcolare la minima distanza tra queste ultime due rette.

**Es. 71.** Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per  $(1, 2, 4)$  e perpendicolare al piano di equazione  $x + 2y - 3z - 1 = 0$ .

**Es. 72.** Scrivere equazioni cartesiane delle due rette passanti per  $Q = (3, 5, 4)$ , tangenti alla sfera  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 20 = 0$  e parallele al piano  $\pi : x - 1 = 0$ .

**Es. 73.** Verificare che l'insieme  $\{\underline{v} \in \mathbf{R}^3 : \underline{v} \times (7, 8, 9) = 0\}$  è un sottospazio. Determinarne la dimensione e una base.

## Sistemi, discussioni, interpretazione geometrica

**Es. 74.** Risolvere i due seguenti sistemi, col metodo di Cramer.

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}, \quad 2 : \begin{cases} 7x = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} .$$

**Es. 75.** Trovare tutte le eventuali soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 41y = 0 \end{cases}, \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ 6x + 9y = 7 \end{cases}, \quad 3 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$4 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}, \quad 5 : \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} .$$

Disegnare le corrispondenti rette, sia mediante tabelle che con lo studio del coefficiente angolare e della quota. Giustificare geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate.

**Es. 76.** Solo nel secondo dei due seguenti sistemi la terza equazione si può ottenere “sommando” le due equazioni superiori, preventivamente moltiplicate per certi numeri (verificarlo). Dedurne che il primo sistema è impossibile, mentre il secondo ammette un’unica soluzione – è cioè “compatibile” poiché conduce all’identità  $0 = 0$ .

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \\ 8x - 9y = 21 \end{cases}, \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \\ 8x - 9y = 20 \end{cases} .$$

**Es. 77.** Calcolare (se esistono) tutte le soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - 2z - 2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y - 2z - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} .$$

Interpretare tali sistemi come intersezioni di opportuni enti geometrici.

**Es. 78.** Trovare tutte le soluzioni (purché ve ne siano) per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1 : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}, \quad 2 : \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 5 \\ 4x + 6y + 6z = 9 \end{cases}, \quad 3 : \begin{cases} 3x - 6y + w + z = 0 \\ 3y + w - 2z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

Descrivere geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate, per ciascun sistema.

**Es. 79.** Dimostrare che un sistema lineare ammette soluzione se e solo se il rango per colonne della matrice incompleta coincide col rango per colonne della completa.

**Es. 80.** Discutere i seguenti sistemi parametrici, al variare di  $k \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} kx + 3y = k \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} kx + 3y + 5z = 0 \\ x + 6y + 10z = 0 \end{cases}.$$

Interpretare tali sistemi come intersezione di opportuni enti geometrici, al variare di  $k$ .

**Es. 81.** Determinare i valori di  $k$  che rendono privo di soluzioni il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + 3z = -2 \\ 7x + 3y + kz = 8 \end{cases}.$$

**Es. 82.** Discutere l'esistenza di soluzioni, e il loro grado di libertà  $\infty^c$ , al variare di  $U \in \mathbf{R}$ , per il

sistema  $\begin{cases} Ux + y - z = 0 \\ 2y + Uz = U \\ x - z = 0 \end{cases}.$

**Es. 83.** Discutere i seguenti sistemi al variare di  $k \in \mathbf{R}$  e descrivere le relative entità geometriche, sempre al variare di  $k$ :

$$1 : \begin{cases} 2x + ky - 5k = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} ; \quad 2 : \begin{cases} 2x + ky - 5 = 0 \\ 2x + 3y - k = 0 \\ 4x + 6y - 2 = 0 \end{cases} ; \quad 3 : \begin{cases} kx + 2y = 0 \\ 2x + ky = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

**Es. 84.** Risolvere il seguente sistema; interpretare geometricamente le equazioni.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}.$$

**Es. 85.** Determinare i valori di  $k$  (in  $\mathbf{R}$ ) per i quali il sistema  $\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ ky + z = 0 \\ x - 2z = 3 \end{cases}$  ammette

infinite soluzioni. Interpretare geometricamente le tre equazioni, al variare di  $k$ . Infine risolvere il sistema ponendo  $k = 0$ .

**Es. 86.** Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Successivamente, notando che  $(1, 0, -1, 3)$  è una soluzione del sistema avente la stessa parte omogenea del precedente ma termini noti uguali rispettivamente a 4, 5, -5, 9, dedurre la soluzione generale di quest'ultimo sistema senza effettuare ulteriori calcoli.

**Es. 87.** Utilizzando un'interpretazione geometrica, determinare tutte le soluzioni del sistema di

disequazioni  $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}.$

**Es. 88.** Sia  $F$  l'applicazione che assegna ad ogni punto  $(x, y, z)$  dello spazio la sua *temperatura*, per ipotesi uguale a  $x + 2y - 3z$  gradi centigradi (supponiamo, irrealisticamente, che la temperatura possa assumere qualunque valore!), e la sua *altezza*, uguale a  $z$  metri. Descrivere il luogo dei punti che hanno temperatura e altezza nulla, poi il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura  $\tau$ , infine il luogo dei punti che hanno una fissata temperatura  $\tau$  e una fissata altezza  $h$ .

**Es. 89.** Sia  $f$  un'applicazione lineare tra spazi vettoriali reali  $U$  e  $V$ . Presi  $s$  vettori linearmente dipendenti  $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_s$  nel dominio  $U$ , dimostrare che  $f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_s)$  sono  $s$  vettori linearmente dipendenti nel codominio  $V$ . Dimostrare, poi, che la stessa proprietà relativamente all'*indipendenza* lineare vale solo se  $f$  è iniettiva.

**Es. 90.** Due spazi vettoriali  $U, V$  si dicono *isomorfi* se esiste un'applicazione lineare  $\varphi : U \rightarrow V$  che sia anche biunivoca ( $\varphi$  è detta un *isomorfismo*). Dimostrare che in presenza di un isomorfismo  $U$  e  $V$  hanno la stessa dimensione (supporre che la dimensione di  $U$  non sia infinita).

**Es. 91.** Esibire un isomorfismo tra lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 5 a coefficienti reali e quello delle matrici triangolari superiori di ordine 3 a valori reali, descrivendo esplicitamente le immagini di una data base del dominio.

**Es. 92.** Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base canonica di  $\mathbf{R}^2$  alla base  $\mathcal{A} = \{(1, 2), (3, 8)\}$ , e la matrice del cambiamento di coordinate da  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$ .

**Es. 93.** Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base  $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, -1)\}$  alla base  $\mathcal{A}' = \{(2, 3), (4, 1)\}$ .

**Es. 94.** Determinare una base del nucleo, una dell'immagine, e le due rispettive dimensioni, per l'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita da  $f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 2x + 6y + 8z)$ . Stabilire se  $f$  è iniettiva, suriettiva, biiettiva. Determinare i vettori  $\underline{u} \in \mathbf{R}^3$  tali che  $f(\underline{u}) = (5, 10)$ , cioè calcolare la controimmagine  $f^{-1}(5, 10)$ . Tenendo presente l'Es. 92, scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica nel dominio e alla base  $\mathcal{A}$  nel codominio, e successivamente scrivere la matrice di  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  nel dominio e ad  $\mathcal{A}$  nel codominio.

**Es. 95.** Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare  $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$  tale che  $g(1, 0) = (1, 2, 3, 4)$  e  $g(0, 1) = (-1, -2, -3, -4)$ . Stabilire se l'immagine di  $g$  è l'intero codominio  $\mathbf{R}^4$ . Infine, scrivere la matrice di  $g$  rispetto alla base  $\{(2, 1), (2, 3)\}$  del dominio e alla base canonica del codominio, e calcolare  $g(8, 6)$  utilizzando tale matrice.

**Es. 96.** Di un'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  è noto che  $f(8, 9) = (8, 9)$  e che  $f(9, 10) = (9, 10)$ . Dimostrare che  $f$  è l'applicazione identità, cioè che  $f(\underline{u}) = \underline{u}$  per ogni  $\underline{u}$ .

**Es. 97.** Di un'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  è noto che  $f(1, 2) = (8, 9)$  e che  $f(3, 4) = (16, 18)$ . Calcolare una base di  $\text{Ker}(f)$ .

**Es. 98.** Sia  $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$  una fissata base di uno spazio vettoriale  $U$  e sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione 2. Di un'applicazione lineare  $f : U \rightarrow V$  è noto che  $f(\underline{u}_1) = \underline{0}_V$  e  $f(\underline{u}_2) = f(\underline{u}_3) = \underline{v}$  dove  $\underline{v}$  è un certo vettore di  $V$ , diverso dallo zero. Descrivere la controimmagine di  $\underline{v}$ . Stabilire se  $f$  è suriettiva. Esibire una base del nucleo di  $f$ .

**Es. 99.** Siano  $U$  e  $V$  due spazi vettoriali le cui basi sono state scelte come  $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$  e  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ . Sia data l'applicazione lineare  $f : U \rightarrow V$  tale che  $f(\underline{u}_1) = \underline{v}_2 - 4\underline{v}_3$  e  $f(\underline{u}_2) = \underline{v}_1 + 5\underline{v}_2$ . Determinare un vettore di  $V$  che non abbia controimmagine secondo  $f$ .

**Es. 100.** Dimostrare che l'insieme delle applicazioni lineari da  $\mathbf{R}^3$  a  $\mathbf{R}^2$ , sia esso  $\mathcal{L}_3^2$ , munito delle operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare, è uno spazio vettoriale. Esibirne una base (essa consiste di 6 elementi).

**Es. 101.** Sia data  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  tale che  $f(x, y) = (3x + y, 3y)$ . Calcolare i vettori del nucleo di  $f$ . Stabilire se  $f$  è suriettiva e se è diagonalizzabile. Calcolare  $f^{-1}(0, 10)$ . Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base  $\{(1, 1), (2, 1)\}$  nel dominio e alla base canonica nel codominio.

**Es. 102.** Data l'applicazione lineare  $\ell : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice  $M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & -32 & -4 \end{pmatrix}$ , determinare una base di autovettori che diagonalizzi  $\ell$ . Scrivere la conseguente matrice diagonale, senza calcolare prodotti di matrici.

**Es. 103.** Calcolare una base di autovettori dell'applicazione lineare definita, mediante le basi canoniche del dominio e del codominio ( $\mathbf{R}^3$ ), dalla matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Scrivere anche il relativo prodotto di matrici che diagonalizza  $A$ , e scrivere la matrice diagonale risultante.

**Es. 104.** Trovare le eventuali matrici diagonalizzabili tra le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Es. 105.** Sia data l'applicazione  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tale che  $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$ . Calcolarne: la controimmagine di  $(4, 3, 5)$ , gli autovalori e almeno un autovettore (nota: un autovalore è uguale a 6). Stabilire se, rispetto a una certa base nel dominio e nel codominio, è vero che  $f(X, Y, Z)$  si scrive nella forma  $(\alpha X, \beta Y, \gamma Z)$ .

**Es. 106.** Calcolare una base di autovettori (soltanto due) dell'applicazione  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da  $f(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$ ,  $f(0, 1, 0) = (4, 1, -2)$ ,  $f(0, 0, 1) = (-4, 2, 5)$ . Introdurre poi un vettore perpendicolare alla base trovata e scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base estesa (sia nel dominio che nel codominio).

**Es. 107.** Esibire una base di autovettori per l'applicazione  $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  che trasforma i tre vettori ordinati della base canonica rispettivamente in  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0)$ ,  $(5, 6, 7)$ . È possibile esibire una base ortogonale?

**Es. 108.** Sia  $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Poiché (dimostrare) è possibile trovare una matrice  $R$  tale che

$$R^{-1}MR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: D,$$

utilizzando l'identità inversa  $M = RDR^{-1}$  calcolare  $M^{10}$ .

**Es. 109.** Di un'applicazione lineare  $g$  è noto che  $g(1, 2) = (1, 2)$  e che  $(2, -1)$  è un autovettore con relativo autovalore uguale a 3. Calcolare  $g(1, 0)$  e  $g(0, 1)$ . Stabilire se  $g$  è suriettiva e se è biunivoca.

**Es. 110.** Di una funzione  $f$  definita da  $\mathbf{R}^2$  a  $\mathbf{R}^3$  è noto che  $f(2, 3) = f(3, 4) = f(5, 6) = (1, 0, 0)$ . Possiamo essere certi che questa funzione è lineare? Possiamo essere certi che questa funzione non è lineare? Essa, più debolmente, *potrebbe* essere lineare anche se non è sicuro che lo sia?

**Es. 111.** Stabilire se  $(1, 3, 0)$  è un autovettore per l'applicazione lineare  $g$  di cui è noto che  $g(1, 1, 0) = (2, 2, 0)$  e  $g(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ .

**Es. 112.** Sia  $M$  una matrice simmetrica di ordine  $n$  e sia  $R$  una matrice le cui colonne sono autovettori di  $M$  a due a due ortogonali e di modulo 1, intendendo  $M$  come la matrice di un'applicazione lineare secondo una base fissata nel dominio e nel codominio che sono uguali a  $\mathbf{R}^n$  (dunque  $R^{-1}MR$  è una matrice diagonale che reca i vari autovalori con le rispettive molteplicità). Dimostrare che in effetti  $R^{-1} = R^t$  (questa proprietà fa di  $R$  una matrice *ortogonale*; come approfondimento, vedere l'Es. 156).

**Es. 113.** Dimostrare il teorema spettrale nel caso di matrici simmetriche di ordine 2.

## VII

# Ortogonalità e approfondimenti sui sottospazi

**Es. 114.** Determinare gli eventuali valori di  $a$  che rendono linearmente dipendenti i vettori  $(a, 1, 0, 0)$ ,  $(1, a, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 2, a)$ . Scrivere una o più equazioni cartesiane (essenziali) del sottospazio generato da tali vettori per  $a = 2$ .

**Es. 115.** Calcolare il rango delle matrici

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 9 & -1 & 14 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare quindi la dimensione, una base ed equazioni cartesiane del sottospazio generato dalle colonne di  $T$ , e poi da quelle di  $U$ .

**Es. 116.** Scrivere un insieme minimale di equazioni cartesiane di  $T = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2), (0, 0, 2, 4), (1, 1, -1, -2) \rangle$ .

**Es. 117.** Dimostrare che cinque vettori a due a due ortogonali di  $\mathbf{R}^5$ , non nulli, costituiscono una base di tale spazio vettoriale.

**Es. 118.** Stabilire se esistono valori di  $h$  (in  $\mathbf{R}$ ) per i quali i vettori  $(h, h, h, h)$ ,  $(h, 1, 0, -1)$ , formano una base ortogonale (di un sottospazio 2-dimensionale di  $\mathbf{R}^4$ ).

**Es. 119.** Determinare una base ortogonale del sottospazio  $W = \langle (1, 0, 0, 1), (1, 1, 2, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$ . Estenderla poi a una base di  $\mathbf{R}^4$  (non necessariamente ortogonale).

**Es. 120.** Calcolare la proiezione ortogonale di  $(-1, 1, 2)$  sul sottospazio  $S = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 0), (3, 0, 2) \rangle$ .

**Es. 121.** Dopo aver calcolato una base ortogonale del sottospazio  $S$ , in  $\mathbf{R}^4$ , di equazioni  $x_1 - x_4 = x_2 - x_4 = 0$ , decomporre il vettore  $(2, 0, 1, 0)$  nella proiezione ortogonale e nella componente ortogonale rispetto a  $S$ . Successivamente calcolare quest'ultima componente anche come la proiezione ortogonale di  $(2, 0, 1, 0)$  sul sottospazio ortogonale  $S^\perp$ .

**Es. 122.** Calcolare la proiezione ortogonale del vettore  $(1, 0, 0)$  sul sottospazio  $S$  di equazione  $x - 2y + 4z = 0$ . Calcolare la dimensione del sottospazio  $S + \langle (4, 0, -1) \rangle$ .

**Es. 123.** Calcolare la proiezione ortogonale di  $(1, 2, 4)$  su  $S = \langle (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 0) \rangle$ . Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche di  $S$  e anche di  $S^\perp$ .

**Es. 124.** Calcolare la proiezione ortogonale di  $(1, 2, 4, 2)$  su  $S = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2) \rangle$ . Calcolare anche la componente ortogonale. Scrivere equazioni cartesiane e parametriche di  $S$ .

**Es. 125.** Determinare una base, poi equazioni cartesiane e infine parametriche del sottospazio  $T = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 3, 3) \rangle$ . Determinare inoltre equazioni cartesiane di  $T^\perp$ , la sua dimensione e una base.

**Es. 126.** Calcolare la proiezione ortogonale di  $(1, 2, 3, 4)$  su  $S = \langle (4, 1, 0, 0), (4, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle$ . Scrivere equazioni cartesiane di  $S$  e di  $S^\perp$ .

**Es. 127.** Calcolare la proiezione ortogonale di  $(1, 0, 0, 0)$  rispetto al sottospazio  $S : 2x - y + 2w - z = x - z = 0$ . Stabilire se la somma di  $S$  col sottospazio  $T = \langle (1, 3, 1, 2), (0, 0, 0, 1) \rangle$  è una somma diretta.

**Es. 128.** Determinare le coordinate del vettore  $(1, 0, 0)$  rispetto alla base  $(\sqrt{2}, 1, 0), (-1, \sqrt{2}, 3), (2\sqrt{2}, -4, 2\sqrt{2})$ .

**Es. 129.** Calcolare la proiezione ortogonale del vettore  $(8, 2, 3)$  rispetto al sottospazio  $S = \langle (2, 5, 6), (1, 1, 0), (0, 0, 3) \rangle$ .

**Es. 130.** Decomporre il vettore  $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$  in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio  $S$ , in  $\mathbf{R}^4$ , definito dalla sola equazione  $2x + y + 3w - z = 0$ .

**Es. 131.** Decomporre il vettore  $\underline{v} = (1, 0, 3, 2)$  in proiezione e componente ortogonale rispetto al sottospazio  $S$  definito dal sistema  $2x + y + 3w - z = x - z = y + w + z = 0$ .

**Es. 132.** Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi  $S = \langle (1, 2, 3, 4), (1, 2, 0, 1) \rangle$  e  $T = \langle (0, 1, 0, 1), (2, 3, 3, 4) \rangle$ .

**Es. 133.** Uno spazio vettoriale  $V$  ha la proprietà di contenere due sottospazi di dimensione 5 la cui intersezione è il solo vettore nullo. Stabilire se  $\dim(V)$  può essere uguale a 10 e se essa può essere uguale a 11.

**Es. 134.** Esibire una base del sottospazio  $\langle (1, 2, 3, 1), (1, 2, 4, 1) \rangle + \langle (1, 2, 5, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle$ . Verificare la validità della formula di Grassmann in questo contesto, calcolando esplicitamente la dimensione dell'intersezione dei due sottospazi.

**Es. 135.** In  $\mathbf{R}^5$  sono dati i due sottospazi  $S : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$  e  $T : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$ . Dimostrare che  $S + T = \mathbf{R}^5$ .



**Es. 136.** Determinare sia il vertice che un'equazione della direttrice, per la parabola di equazione  $9x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{10}x = 0$ .

**Es. 137.** Stabilire se  $A = (24, -143)$  è un punto allineato con  $B = (1, 0)$  e col fuoco della parabola di equazione  $y = 3x^2 - 12x$ . Esibire la traslazione necessaria per portare il vertice di tale parabola nella nuova origine.

**Es. 138.** Calcolare i versori degli assi (idonei autovettori normalizzati...) della conica di equazione  $2x^2 + 4xy - y^2 - 12 = 0$ . Calcolare le coordinate di uno dei suoi fuochi, a scelta, e scrivere l'equazione della relativa direttrice.

**Es. 139.** Sia  $P(x, y)$  un polinomio di grado 2 in 2 variabili, avente i monomi in  $x^2$  e  $y^2$  di segno opposto. Dimostrare che l'equazione relativa a  $P$  non rappresenta un'ellisse, né una parabola.

**Es. 140.** Calcolare le coordinate di un fuoco e l'equazione di un asintoto (nel riferimento  $Oxy$ ) relativamente alla conica di equazione  $3x^2 + 4xy + 16 = 0$ .

**Es. 141.** Esibire una formula per calcolare l'eccentricità di un'ellisse come funzione dei due autovalori.

**Es. 142.** Determinare i valori di  $p$  tali che la curva di equazione  $x^2 + pxy + 4y^2 + (p - 2\sqrt{10})x - 6 = 0$  sia una parabola. Successivamente, porre  $p = 2\sqrt{10}$ ; sia  $\mathcal{C}$  la curva ottenuta. Esibire un cambiamento di coordinate che dia a  $\mathcal{C}$  una forma canonica, e scrivere tale forma. Determinare i fuochi di  $\mathcal{C}$ , sia nel nuovo riferimento che in quello originale. Calcolare l'eccentricità di  $\mathcal{C}$ .

**Es. 143.** Sia data l'iperbole di equazione  $3x^2 - 26\sqrt{3}xy - 23y^2 + 144 = 0$ . Calcolarne: le direzioni (versori) degli assi, una forma canonica, le coordinate dei fuochi e le equazioni degli asintoti sia nella forma canonica che in quella iniziale, infine l'eccentricità.

**Es. 144.** Determinare le direzioni degli assi (autovettori normalizzati) e l'eccentricità della curva di equazione  $19x^2 + 24xy + 26y^2 - 140 = 0$ .

**Es. 145.** Scrivere una forma canonica della curva di equazione  $2x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 8y - 2 = 0$ . Calcolarne il centro e l'eccentricità.

**Es. 146.** Scrivere le coordinate di un fuoco e un'equazione della relativa direttrice della curva di equazione  $xy - 10 = 0$ .

**Es. 147.** Di una parabola è noto che la direttrice ha equazione  $y = 3x + 5$  e il fuoco ha coordinate  $(8, 2)$ . Stabilire se  $(4, 4)$  è un punto della parabola.

**Es. 148.** Con riferimento all'Es. 147, determinare i punti che appartengono alla parabola ed hanno ordinata nulla.

**Es. 149.** Sia  $\mathcal{C}$  la conica che ha il fuoco e la direttrice come nell'Es. 147 e che inoltre passa per  $(4, 4)$ . Stabilire se  $\mathcal{C}$  è un'ellisse.

**Es. 150.** Dato un cono e un piano che lo interseca formando un'ellisse, i *fuochi* di questa ellisse possono essere definiti come i punti di tangenza, su tale piano, delle due sfere inscritte nel cono e appunto tangenti al piano (vedere la figura). Partendo dunque dalla definizione di ellisse come intersezione opportuna di un cono e di un piano, dimostrare che la somma delle distanze dai due fuochi di un punto qualunque dell'ellisse è costante.

**Es. 151.** Nell'emisfero boreale il periodo primavera-estate dura qualche giorno in più rispetto all'autunno-inverno. Dimostrare che tale discrepanza è legata alla forma ellittica dell'orbita terrestre.

**Es. 152.** Scrivere un'equazione cartesiana del piano osculatore relativo alla curva  $\gamma$  parametrizzata da  $P(t) = (\cos t, \sin t, t)$  nel punto  $P(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$ .

**Es. 153.** Calcolare il vettore binormale relativo alla curva  $\gamma$  definita da  $P(t) = (t, t^2, t^3)$ , nel punto  $H = (1, 1, 1)$ .

**Es. 154.** Calcolare il raggio di curvatura di  $\gamma$  definita da  $P(t) = (t, t^2, t^3)$ , nell'origine. Calcolare il relativo centro di curvatura.

**Es. 155.** Sia  $\gamma$  una curva la cui parametrizzazione  $P(z)$  genera vettori tangenti di lunghezza costante, uguale a 5. Dimostrare che  $P''$  è ortogonale a  $P'$  in ogni punto.

**Es. 156.** Un *gruppo* è un insieme  $G$  munito di un'operazione binaria “ $\cdot$ ” che sia associativa e inoltre preveda l'esistenza di un elemento neutro  $e$  tale che  $e \cdot g = g \cdot e = g \forall g \in G$  e anche l'esistenza di un elemento *inverso*  $g^{-1}$ , per ogni  $g \in G$ , tale che  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ . Ad es. l'insieme dei numeri interi  $\mathbf{Z}$  è un gruppo rispetto all'operazione di somma; in questo caso il simbolo  $\cdot$  diviene  $+$  per dare risalto alla *commutatività* che invece in generale non vale (infatti essa non è prevista negli assiomi di gruppo, insomma non è “di serie”). Oltretutto, il prodotto in  $\mathbf{Z}$  ha un significato diverso e non dà luogo a un gruppo (perché?).

Un altro importante esempio di gruppo è quello delle matrici invertibili di ordine fissato, con l'operazione di moltiplicazione; si tratta di un gruppo non commutativo.

Con queste premesse, dimostrare che l'insieme delle matrici cosiddette *ortogonali* di ordine fissato  $n$  (le matrici invertibili  $M$  di ordine  $n$  tali che  $M^{-1} = M^t$ ) formano un gruppo  $\mathcal{O}_n$  non commutativo rispetto all'usuale operazione di prodotto tra matrici (dunque formano un cosiddetto *sottogruppo* del gruppo delle matrici invertibili di ordine  $n$ ).

**Es. 157.** Dimostrare che il seguente insieme,  $\mathbf{Z}_n$ , per un fissato intero  $n \geq 2$ , è un gruppo. Definiamo  $\mathbf{Z}_n$  come l'insieme dei *resti* della divisione di un numero intero per  $n$ , dunque  $\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$ ; si tratta dell'*insieme quoziente*, in  $\mathbf{Z}$ , rispetto alla relazione di “avere lo stesso resto modulo  $n$ ”, che equivale (esercizio) alla relazione “ $n$  divide la differenza tra i due numeri”. Nota: un altro notevole insieme quoziente è quello dei vettori liberi rispetto alla relazione di sovrapposibilità (avere lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso).

Torniamo al caso presente. Dati due resti  $[r]$  e  $[r']$ , definiamo la loro somma come il resto di  $a + a'$ , dove  $a$  ha resto  $r$  e  $a'$  ha resto  $r'$  (in particolare occorrerà dimostrare che la definizione è *ben posta*, cioè essa non dipende dalla scelta di  $a$  e  $a'$  in  $\mathbf{Z}$ ). Dimostrare dunque che gli interi modulo  $n$  formano un gruppo (commutativo).