GEOMETRIA – Prova scritta telematica del 19 gennaio 2021, ore 10.00.
Durata totale: 2 ore e 30 minuti (escluso il caricamento delle foto).

La prova consiste di una sequenza di 2 sessioni exam.net in serie. Al termine di ogni sessione deve essere inviata la risoluzione (con giustificazioni delle risposte) mediante una o più foto da caricare nel sito exam.net.

$\boxed{\text{L'ordine delle risposte può essere deciso arbitrariamente.}}$ È ammessa la prosecuzione di un esercizio nella sessione successiva, purché venga indicato con chiarezza il riferimento precedente (ad es. con un asterisco e una nota). È anche possibile modificare eventualmente le risposte ai quesiti.

PARTE 1. *Quesiti*

Riportare nel foglio il codice del quesito insieme alla risposta, $\boxed{\textbf{senza giustificazioni.}}$

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

⊙ Q1 Non esistono vettori che siano ortogonali a se stessi. [F]

⊙ Q2 Un sistema lineare con più incognite che equazioni è sempre risolubile. [F]

⊙ Q3 Il rango per minori coincide col numero di pivot in una data riduzione a gradini. [V]

⊙ Q4 Il prodotto vettoriale di due versori coincidenti è il vettore nullo. [V]

⊙ D1 Determinare il numero reale k che rende parallele le rette $r : x + ky = y - z = 0$ e $s : x + y = x + z - 1 = 0$. [1]

⊙ D2 Calcolare il determinante della matrice risultante dal seguente prodotto:
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. $[-\frac{4}{5}]$

⊙ D3 Calcolare l'unico autovalore della funzione $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ definita da $f(x) = -x$. $[-1]$

⊙ D4 Calcolare la dimensione del sottospazio formato dalle matrici simmetriche di ordine 4 a valori reali. [10]

PARTE 2. *Esercizi*

$\boxed{\textbf{Giustificare le risposte.}}$

Esercizio 1.

Determinare il numero naturale $n \in \mathbf{N}$ tale che la distanza tra l'asse x e il piano $\pi : 9y - 8z + n = 0$ sia uguale a $\sqrt{5/29}$.

Posto successivamente $n = 11$, scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per l'origine ed è perpendicolare al piano π e a $\pi' : x + y + z = 0$.

Sol. Consideriamo un punto qualunque sull'asse x, ad es. $(0, 0, 0)$. Utilizzando ora la formula della distanza punto-piano otteniamo $n = \pm 5$ ma dobbiamo escludere il valore negativo.

Possiamo poi imporre che sia nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 9 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

ottenendo l'equazione $17x - 8y - 9z = 0$.

Esercizio 2.

Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, 3x + 3y + 3z)$, determinarne una base di autovettori.

Spiegare perché la modifica di un solo monomio, dei nove presenti, non è sufficiente per ottenere una funzione suriettiva.

Sol. Gli autovalori sono 0 e 6, con rispettivi autovettori del tipo $(-s-t, s, t)$ (da cui preleviamo due autovettori) e $(1, 2, 3)$.

Il rango vale 1, quindi l'alterazione di un solo monomio può portarlo a 2, sempre minore della dimensione del codominio.

Esercizio 3.

Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3, 4)$ sul sottospazio $S : x_1 - x_2 = x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Stabilire se la somma di S col sottospazio $T = \langle (1, 1, 1, 2), (0, 0, 0, 1) \rangle$ è una somma diretta.

Sol. Una base di S è $\{(1, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 1)$ ma deve essere ortogonalizzata. Modificando il primo vettore rispetto al secondo otteniamo

$$(1, 1, -1, 0) - \frac{-1}{2}(0, 0, 1, 1) = \left(1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ ,$$

che possiamo migliorare considerando $(2, 2, -1, 1)$. Ora la proiezione è uguale a

$$\frac{7}{10}(2, 2, -1, 1) + \frac{7}{2}(0, 0, 1, 1) = \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, \frac{14}{5}, \frac{21}{5}\right) \ .$$

La somma non è diretta perché l'intersezione contiene ad es. $(1, 1, 1, 2)$.

Esercizio 4.

Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'iperbole di equazione $15x^2 - 8xy - 32 = 0$.

Determinare le equazioni originali dei suoi asintoti.

Sol. Autovettori: $(4, -1)$ per $\lambda = 16$, $(1, 4)$ per $\lambda = -1$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{32} = 1$.

Gli asintoti, nelle nuove coordinate, sono definiti da $Y = \pm 4X$ Sostituendo X e Y mediante le formule *inverse*, otteniamo

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad , \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \ .$$

Nelle vecchie coordinate abbiamo quindi $(x + y) = \pm 4(-x + y)$ ecc.