Parte I

⊙ Il prodotto vettoriale di due versori è ancora un versore. [ F ]

⊙ Una matrice simmetrica $4 \times 4$ ammette sempre 4 autovettori linearmente indipendenti. [ V ]

⊙ Il nucleo di un'applicazione lineare suriettiva ha dimensione maggiore di 0. [ F ]

⊙ In $\mathbf{R}^3$, il sottospazio ortogonale a $\mathbf{R}^3$ ha dimensione 1. [ F ]

–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–

⊙ In un riferimento $Oxyz$, calcolare la proiezione ortogonale (scalare positivo) di $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ sulla retta $r : x - y = y - z - 3 = 0$. $[\frac{2}{\sqrt{3}}]$

⊙ Trovare l'eccentricità della conica definita dall'equazione $2x^2 - 8xy + 8y^2 - x + y - 5 = 0$ .[1]

⊙ Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale costituito dai vettori di $\mathbf{R}^9$ che restano invariati se letti al contrario. [5]

⊙ Calcolare la seconda coordinata del vettore $(2, 3, 3, \sqrt{7})$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 3)\}$. [1]

---

⊙ Il prodotto vettoriale di due versori può avere il modulo minore di 1. [ V ]

⊙ Una matrice invertibile ammette sempre 3 autovettori linearmente indipendenti. [ F ]

⊙ L'unione di due sottospazi è un sottospazio. [ F ]

⊙ In $\mathbf{R}^4$, il sottospazio ortogonale a $\{\underline{0}\}$ ha dimensione 3. [ F ]

–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–

⊙ In un riferimento $Oxyz$, calcolare la proiezione ortogonale (scalare positivo) di $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ sulla retta $r : x - y = y - z - 3 = 0$. $[\frac{1}{\sqrt{3}}]$

⊙ Determinare $p \in \mathbf{R}$ in modo che l'equazione $px^2 + 8xy + 16y^2 - 5x = 0$ rappresenti una parabola. [1]

⊙ Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale costituito dai vettori di $\mathbf{R}^7$ le cui 7 componenti, se sommate, danno 0. [6]

⊙ Calcolare la seconda coordinata del vettore $(2, 6, 6, \sqrt{7})$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 3)\}$. [2]

Parte II

**Esercizio 1.**

$\boxed{2}$ Stabilire se i punti $A = (0, 1, 2)$, $B = (\sqrt{2}, 2, 3)$, $C = (2, 1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ sono allineati.

$\boxed{3}$ Scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per $A$ e parallelo simultaneamente all'asse $y$ e alla retta $r : x + y = 2y - z - 8 = 0$.

$\boxed{2.5}$ Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato da $r$ e dal piano contenente l'asse $y$ e l'asse $z$

**Sol.** I relativi vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ (per comodità confrontiamo questi due vettori) sono proporzionali, quindi i punti sono allineati.

Un vettore direttore di $r$ è $(1, -1, -2)$. Abbiamo quindi:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 2x+z-2=0 \;.$$

Un vettore normale del piano in esame è $(1,0,0)$. Abbiamo quindi:

$$\sin\vartheta = \frac{(1,0,0)\times(1,-1,-2)}{1\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \;\Rightarrow\; \cos\vartheta = \sqrt{1-\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \;.$$

**Esercizio 2.**

$\boxed{\mathbf{3}}$ Determinare una base di 3 autovettori relativi all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (x+2y+3z, x+5z, x+4y+z)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcolare la controimmagine (parametrica) di $(3,1,5)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Determinare una base ortogonale dell'immagine di $f$.

**Sol.** Imponendo

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

otteniamo un'equazione di terzo grado la cui risoluzione è facile: un autovalore vale 0; gli altri due sono 6 e $-4$. I rispettivi autovettori, a meno di un fattore, sono $(5,-1,-1)$, $(1,1,1)$ e $(1,11,-9)$.

Il sistema $(x+2y+3z, x+5z, x+4y+z) = (3,1,5)$ ha i ranghi uguali a 2 e ammette ad es. la soluzione parametrica $(x,y,z) = (1,1,0) + t(5,-1,-1)$, dove $(1,1,0)$ è una soluzione particolare e il secondo addendo è il vettore generico del nucleo.

Le colonne $(1,1,1)$ e $(2,0,4)$ — meglio $(1,0,2)$ — costituiscono una base di $Im(f)$. Ortogonalizzando il secondo vettore otteniamo

$$(1,0,2) - \frac{3}{3}(1,1,1) = (0,-1,1)$$

che insieme a $(1,1,1)$ forma un'idonea base ortogonale.

**Esercizio 3.**

$\boxed{\mathbf{3.5}}$ Al variare di $k \in \mathbf{R}$, discutere l'esistenza e il tipo $\infty^c$ delle soluzioni relative al sistema

$$\begin{cases} 2x+ky=k \\ x+kz=2 \\ 3x+2ky-kz=1 \end{cases} .$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Per $k=0$ descrivere le posizioni reciproche, nello spazio, dei tre piani rappresentati dalle relative equazioni.

**Sol.** Il determinante della matrice incompleta è identicamente nullo, quindi per ogni $k$ il rango di questa matrice vale meno di 3. Utilizzando il teorema degli orlati (considerando il minore $2\times 2$ in alto a sinistra, purché $k$ non sia nullo) risolviamo ora l'equazione relativa al secondo orlo,

$$\begin{vmatrix} 2 & k & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2k & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 2k^2-3k=0 \;\Rightarrow\; k \in \left\{0, \frac{3}{2}\right\} \;.$$

Se $k=\frac{3}{2}$ i ranghi sono uguali a 2, quindi abbiamo $\infty^1$ soluzioni. Se $k=0$ sostituiamo direttamente il valore di $k$ nel sistema e non troviamo alcuna soluzione (tre piani paralleli, in effetti, come risposta alla seconda domanda); per gli altri valori di $k$ non abbiamo soluzioni (ranghi diversi, $2<3$).