Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte mediante procedimenti e calcoli chiari.
Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.
Totale:...

1. [2.5] Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che i punti $A = (0, 2, 3)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (h, 4, 5)$ siano complanari.

[1.5] Scrivere equazioni parametriche della retta passante per B e C.

[2.5] Tra i punti di tale retta, determinare quelli distanti $\sqrt{42}$ da A.

Sol. L'equazione

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ h-1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

ottenuta imponendo che $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ siano linearmente dipendenti, porta a $h = 0$.

Equazioni parametriche: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$. Imponendo che $(1, t, t)$ e A abbiano la distanza richiesta, otteniamo i punti $(1, -2, -2)$ e $(1, 7, 7)$.

2. [2.5] Data la funzione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, w, z) = (x + y, y + w + z, x + 2y + w + z)$, determinarne una base del nucleo.

[2] Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine.

[2] Data inoltre l'applicazione $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definita da $g(r, s, t) = (0, r + s, -r, -s)$, dimostrare che la composizione $f \circ g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è espressa dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.

[3] Utilizzando tale matrice, calcolare una base di autovettori di $f \circ g$.

Sol. La ricerca del nucleo conduce alle due equazioni essenziali $x + y = 0$, $y + w + z = 0$ che danno luogo alle ∞^{4-2} soluzioni $(s, -s, t, s - t)$; una base è ad esempio $\{(1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$. La suriettività non vale, dato che il rango è più piccolo della dimensione del codominio, quindi esistono elementi che non hanno controimmagine. Sostituendo $g(r, s, t)$ all'interno di $f(x, y, w, z)$ otteniamo $(s + t, 0, s + t)$, quindi la matrice è quella del testo. Autovalori: $\lambda = 0$ (autospazio $\alpha + \beta = 0$ con γ libera, ecc.), $\lambda = 1$ (autospazio $\beta = \alpha + \beta - \gamma = 0$, con autovettore $(1, 0, 1)$).

3. [2] Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2, 3, 4, 5)$ rispetto al sottospazio $S = \langle(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2, 2)\rangle$.

[2] Calcolare la dimensione del sottospazio ortogonale a S (in simboli, $S^\perp$).

[2.5] Stabilire se la somma di S con $T = \langle(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)\rangle$ è una somma diretta $\oplus$.

Sol. Ortogonalizzando il secondo vettore rispetto al primo otteniamo

$$(1, 1, 2, 2, 2) - \frac{8}{5}(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{1}{5}(-3, -3, 2, 2, 2) \ .$$

Sommando ora i due contributi delle proiezioni ortogonali singole (dopo aver moltiplicato per 5 il secondo vettore) otteniamo

$$\frac{15}{5}(1, 1, 1, 1, 1) + \frac{15}{30}(-3 - 3, 2, 2, 2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 4, 4, 4\right) \ .$$

Secondo la formula di Grassmann, la dimensione di $S^\perp$ è il complemento, rispetto a 5, della dimensione di S; otteniamo quindi 3.

La somma non è diretta perché esistono vettori non nulli nell'intersezione (ad es. $(1,1,0,0,0)$).

4. [3] Determinare i valori reali di k che rendono risolubile il sistema

$$\begin{cases} kx+ky+kz=k \\ kx+ky+z=1 \\ x+y+z=k \end{cases} .$$

Sol. Il confronto dei ranghi è un metodo rigoroso che tuttavia può lasciare il posto, in questo contesto, a una soluzione più diretta. Supponendo $k\neq 0$ trasformiamo la prima equazione in $x+y+z=1$; col supporto della terza equazione deduciamo che $k=1$. Dunque non esistono altri valori che rendono risolubile il sistema, a parte $k=0$ che dà luogo, in effetti, a un sistema risolubile.

5. [3] Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2-8xy+16y^2-\sqrt{17}x=0$. [2] Determinare le coordinate originali del vertice di questa conica.

Sol. Autovettori: $(1,-4)$ per $\lambda=17$, $(4,1)$ per $\lambda=0$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x=\frac{1}{\sqrt{17}}(X+4Y)$, $y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-4X+Y)$. Essa conduce alla forma canonica

$$Y=-\frac{17}{4}X^2+\frac{X}{4} .$$

Sostituendo le nuove coordinate del vertice (X_V,Y_V) nelle formule, otteniamo le coordinate iniziali (x_V,y_V).

6. [2] Trovare e commentare l'errore presente in questa affermazione: "*L'unione di due sottospazi distinti, all'interno di un dato spazio vettoriale, non dà luogo in alcun caso a un sottospazio.*"

Sol. In certi casi $S\cup T$ è un sottospazio (ad es. se $S\subset T$).