

## Matrice di un'applicazione lineare rispetto a due date basi.

(Supplemento al testo consigliato, *Itinerario di geometria e algebra lineare*)

Sia  $f : U \rightarrow V$  un'applicazione lineare tra due dati spazi vettoriali; siano  $\mathcal{A} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q\}$ ,  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r\}$  basi di  $U$  e  $V$  rispettivamente.

### Definizione:

La *matrice di  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$* , in simboli  $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ , è la matrice  $r \times q$  la cui  $i$ -esima colonna consiste delle coordinate di  $f(\underline{u}_i)$  scritte rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

Ad esempio, se  $U = V = \mathbf{R}^2$  e  $f(x, y) = (2x - y, 3x)$ , la matrice di  $f$  rispetto alle basi canoniche sia del dominio che del codominio è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

perché  $f(1, 0) = (2, 3)$  e  $f(0, 1) = (-1, 0)$ . Se però la base del codominio fosse  $\{(1, 1), (8, 9)\}$ , anziché  $(2, 3)$  dovremmo scrivere le coordinate  $\alpha, \beta$  tali che  $(2, 3) = \alpha(1, 1) + \beta(8, 9)$  e similmente con l'altra colonna.

Nel primo esempio notiamo che

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x \end{pmatrix},$$

dunque la matrice svolge bene il suo lavoro al posto dell'applicazione  $f$ ; la possibilità di sostituire una matrice al simbolo  $f$  rende più rigorosi ed efficienti i ragionamenti sulle applicazioni lineari, consentendo di utilizzare le svariate tecniche del calcolo matriciale (ad es. nella ricerca di autovettori, nello studio delle controimmagini, ecc.).

Come ulteriore esempio, l'applicazione "derivata" dallo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a quello dei polinomi di grado minore o uguale a 2 dà luogo alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

purché scegliamo la base  $\{1, x, x^2, x^3\}$  nel dominio e la base  $\{1, x, x^2\}$  nel codominio. Possiamo calcolare la derivata di  $7x^3 + 4x - 2$  applicando le note regole e ottenendo  $21x^2 + 4$ , ma in alternativa è disponibile il calcolo diretto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix},$$

Questo è un fenomeno generale; mostriamo ora, infatti, come il ruolo di  $f$  è svolto interamente dalla matrice, una volta selezionate le basi nel dominio e nel codominio. Siano dunque

$$f(\underline{u}_1) = \sum_{j=1}^r a_{j1} \underline{v}_j, \dots, f(\underline{u}_i) = \sum_{j=1}^r a_{ji} \underline{v}_j, \dots, f(\underline{u}_q) = \sum_{j=1}^r a_{jq} \underline{v}_j$$

con  $1 \leq i \leq q$ . Sia ora  $\underline{u}$  un vettore arbitrario del dominio  $U$  e consideriamo l'immagine  $f(\underline{u}) \in V$ . Arriveremo a calcolare  $f(\underline{u})$  in due modi: mediante il significato naturale di  $f$  e mediante la matrice.

Per fare questo, occorre intanto considerare le coordinate di  $\underline{u}$  rispetto alla base  $\mathcal{A}$ , cioè quei numeri reali  $t_1, \dots, t_q$  tali che

$$\underline{u} = \sum_{c=1}^q t_c \underline{u}_c .$$

Applicando  $f$  otteniamo:

$$f(\underline{u}) = f\left(\sum_{i=1}^q t_i \underline{u}_i\right) = \sum_{i=1}^q t_i f(\underline{u}_i) = \sum_{i=1}^q t_i \left(\sum_{j=1}^r a_{ji} \underline{v}_j\right) = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^q a_{ji} t_i\right) \underline{v}_j .$$

Siamo dunque riusciti a scrivere l'immagine  $f(\underline{u})$  mediante le coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Ad es. la coordinata rispetto a  $\underline{v}_1$  è  $\sum_{i=1}^q a_{1i} t_i$ , quella rispetto a  $\underline{v}_2$  è  $\sum_{i=1}^q a_{2i} t_i$ , e così via. Attenzione: il secondo “=” scaturisce dalla *linearità* di  $f$ , mentre il quarto “=” è frutto di uno scambio di indici noto come “doppio conteggio”: si pensi al gesto di verniciare rozzamente una griglia rettangolare muovendo il pennello verticalmente e spostandosi da sinistra a destra, oppure muovendo il pennello orizzontalmente mentre scendiamo fino alla base inferiore del rettangolo. In entrambi i casi saremo passati su tutti i quadrati della griglia (più o meno accuratamente...).

Come accennato prima, possiamo arrivare alla stessa conclusione algebrica moltiplicando direttamente  $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$  per il vettore colonna  $(t_1, \dots, t_q)^T$ . Infatti gli elementi  $a_{ji}$  sono disposti in modo tale da riprodurre gli stessi calcoli effettuati prima. La moltiplicazione genererà un vettore colonna che contiene tutte le coordinate, in dettaglio

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & \dots & a_{rq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ t_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^q a_{1i} t_i \\ \sum_{i=1}^q a_{2i} t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^q a_{ri} t_i \end{pmatrix}$$