F O G L I O 5

Soluzioni

$\odot$ Calcolare — anche se in netto anticipo — il rango della matrice rappresentata dal tabellone (o "cartellone") della Tombola natalizia.

[2] Possiamo effettuare le 8 operazioni elementari $\underline{r}_i \to \underline{r}_i - \underline{r}_1$, con $2 \leq i \leq 9$, ecc. In questo modo emergono numerose righe "inutili".

$\odot$ Determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo che il vettore $\overrightarrow{v} = (k, 2, 3)$ sia parallelo al piano $\pi : 3x + y - 4z - 6\sqrt{7} = 0$.

[$\frac{10}{3}$] Dobbiamo considerare soltanto l'equazione della giacitura...

$\odot$ Determinare il minimo numero di equazioni lineari in tre incognite che, costituendo un sistema, definiscano un unico punto nello spazio.

[3] Dobbiamo avere ∞^{3-3} soluzioni, quindi occorre almeno una matrice alta 3 per avere rango 3.

$\odot$ Determinare $t \in \mathbf{R}$ in modo che il punto parametrico $H(t) = (t, t+1, t+1)$ sia contenuto nel piano passante per i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (2, 3, 4)$.

[1] Imponiamo che sia nullo il determinante formato ad es. (per facilità) dai vettori $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AH}$.

$\odot$ Determinare $\omega \in \mathbf{R}$ in modo che l'equazione $\omega x - 2y + 3z + \omega = 0$ rappresenti un piano passante per il punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

[$\sqrt{2} - 2$] Sostituiamo: $\omega\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \omega = 0$, razionalizzando alla fine...

$\odot$ Il rango della matrice completa di un sistema può superare di 2 il rango dell'incompleta. [F]
(non possiamo chiedere troppo alla colonna dei termini noti... al massimo essa riesce a far crescere di uno il rango "per colonne" — sappiamo che il rango può essere definito anche mediante le colonne linearmente indipendenti).

$\odot$ Esistono sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite che rappresentano un piano. [V]
(ad es. sistemi aventi tre equazioni uguali.)

$\odot$ Tre punti nello spazio possono essere non complanari ma sono sicuramente allineati. [F]
(occhio, è il contrario!)

$\odot$ Un sistema lineare in tre incognite e due equazioni, senza soluzione, descrive due rette parallele. [F]
Siamo in presenza di due *piani* paralleli.

$\odot$ Il sottospazio $\{(a + b, a - b, 2b) : a, b \in \mathbf{R}\}$ rappresenta un piano passante per l'origine. [V]
Possiamo anche scrivere una sua equazione cartesiana assorbendo i parametri: $z = 2b$ quindi $b = \frac{z}{2}$, poi $a = y + \frac{z}{2}$ e infine $x = y + \frac{z}{2} + \frac{z}{2}$, o meglio $x - y - z = 0$.

Esercizio 1.

Determinare σ, numero reale, in modo che la retta

$$r : \begin{cases} x + y + z + \sigma = 0 \\ 2x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

sia contenuta nel piano $\pi : 2x + 7y + 5 = 0$. (in termini algebrici, occorre fare in modo che il sistema retta-piano — di tre equazioni — abbia entrambi i ranghi — matrice incompleta e completa — uguali a 2, ad es. con l'aiuto del rango per minori.)

Sol. Sviluppando il calcolo ad es. lungo l'ultima colonna troviamo che il determinante della matrice incompleta vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0 \ .$$

Ora, grazie al teorema degli orlati è sufficiente considerare la sottomatrice (della matrice completa 3×4) relativa alle righe e colonne 1, 2 e imporre che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sigma \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

ottenendo l'equazione $-30 + 20\sigma = 0$ e quidi trovando $\sigma = \frac{3}{2}$.

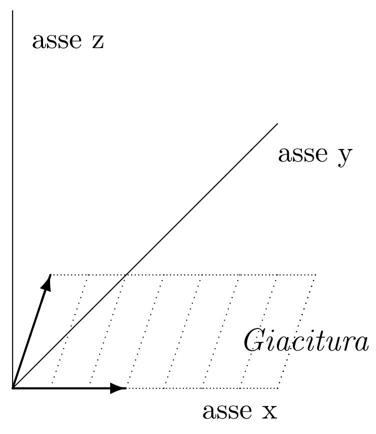
Notiamo che (fidandoci di chi ha scritto l'esercizio...) il rango della matrice incompleta deve valere sicuramente 2 perché non abbiamo alcun modo di modificarlo e alla fine dovremo avere necessariamente entrambi i ranghi uguali a 2 (inoltre osserviamo che un nostro errore nel calcolo di σ porterebbe a un piano *parallelo* alla retta data — ranghi diversi, $2 < 3$). Insomma, non occorre controllare il determinante dell'incompleta. Tale controllo sarebbe invece necessario se la domanda del testo fosse "*Stabilire se* esistono valori di σ tali che la retta sia contenuta nel piano". In questo caso, se emergesse subito che il determinante dell'incompleta non vale zero, saremmo certi che non esiste alcun valore idoneo di σ, poiché il piano e la retta sarebbero incidenti a prescindere da σ.

Esercizio 2.

Descrivere geometricamente la posizione del piano di equazione $y - z + 4 = 0$ in un riferimento cartesiano $Oxyz$. È una posizione un po' speciale, provare ad evidenziarne alcune caratteristiche geometriche.

Sol.

Dimentichiamoci per un attimo del termine noto; otteniamo una giacitura (sottospazio) che ha la particolare caratteristica di lasciare nel piano yz la retta-traccia di equazione $y = z$ (bisettrice del I e III quadrante). La soluzione del relativo sistema omogeneo è (s, t, t), decomponibile in $s(1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$. Emergono dunque i due vettori generatori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ che consentono di visualizzare chiaramente la pendenza.



La soluzione del sistema completo è invece $(s, t, t + 4)$; scorporando i termini costanti otteniamo $(s, t, t) + (0, 0, 4)$: la giacitura è stata sollevata lungo l'asse z secondo il vettore $(0, 0, 4)$.

Senza passare per il sottospazio possiamo notare, in alternativa, che il piano in esame lascia come traccia nel piano yz la retta di equazione $z = y + 4$ e inoltre, mancando la x, esso corre parallelamente all'asse x perché non sussiste alcun vincolo appunto per la variabile x. Ad esempio il punto $(7^{34}, 1, 5)$ appartiene al piano perché fa parte della retta passante per $(0, 1, 5)$ e parallela all'asse x.