FOGLIO 5, soluzioni

$\diamondsuit$ Il prodotto scalare di due versori è uguale a 1. [F]
Esso è esattamente il coseno dell'angolo formato dai versori, quindi *potrebbe* valere 1.

$\diamondsuit$ Se due rette sono ortogonali a un dato piano, esse sono parallele tra loro. [V]

$\diamondsuit$ La funzione somma di due funzioni (reali) iniettive è una funzione iniettiva. [F]
Consideriamo ad es. $f(x)$ e la sua opposta $-f(x)$. La loro somma dà la funzione costante 0.

$\diamondsuit$ La distanza tra due rette parallele varia al variare dei punti scelti su tali rette. [F]
Scegliendo un punto su una retta, resta definito l'unico punto sull'altra retta mediante l'intersezione col piano perpendicolare e passante per il punto scelto.

$\diamondsuit$ La funzione somma di due funzioni lineari è lineare. [V]
$(f+g)(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}+\underline{v}) + g(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) + g(\underline{u}) + g(\underline{v}) = (f+g)(\underline{u}) + (f+g)(\underline{v})$. Il secondo "=" è il cuore della dimostrazione ed è consentito grazie alla *linearità*.

$\diamondsuit$ Conoscendo $f(1,3)$ e $f(2,6)$ è possibile conoscere tutte le immagini $f(\alpha,\beta)$, se f è una funzione lineare con dominio $\mathbf{R}^2$. [F]
I due vettori non formano una base di $\mathbf{R}^2$.

$\diamondsuit$ Esistono infiniti piani paralleli a una data retta e simultaneamente perpendicolari a un'altra retta, se le due rette sono sghembe. [F]
Ciò accade soltanto nel caso in cui i due vettori direttori sono ortogonali.

$\triangledown$ Determinare $a \in \mathbf{R}$ in modo che il piano di equazione $3x + ay + 3z - 1 = 0$ sia perpendicolare alla retta $r : x - y = y - z - 3 = 0$. [3] Il vettore direttore deve essere proporzionale al vettore normale del piano.

$\triangledown$ Determinare $\tau \in \mathbf{R}$ ("tau" in greco) in modo che i vettori $(1,2)$ e $(3,\tau)$ formino un angolo di $45°$. [1] (formula del coseno...)

$\triangledown$ Determinare k, numero reale, in modo che l'applicazione lineare definita da $f(x,y) = (kx, 6x - 3y)$ abbia l'autovettore $(2,3)$ con relativo autovalore 1. [1] In altri termini, $f(2,3)$ deve essere uguale a $1 \cdot (2,3)$ ecc.

$\triangledown$ Determinare la dimensione del nucleo di $f : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^1$ (funzione lineare) che associa ciascuno dei 6 vettori della base canonica di $\mathbf{R}^6$ al numero reale $\sqrt{8}$. [5] Il rango della matrice 1×6 vale 1, quindi il relativo sistema omogeneo (un'unica equazione) $\sqrt{8}x_1 + \sqrt{8}x_2 + \sqrt{8}x_3 + \sqrt{8}x_4 + \sqrt{8}x_5 + \sqrt{8}x_6 = 0$ ha ∞^{6-1} soluzioni.

$\triangledown$ Determinare $h \in \mathbf{R}$ in modo che $(1,1,h)$ sia un autovettore per l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z) = (2x+y, 5x+8y-z, 17x+3y+z)$. [10] (sostituendo il vettore otteniamo $(3, 13-h, 20+h)$ che ora deve essere proporzionale a $(1,1,h)$.

$\triangledown$ Determinare la minima dimensione di uno spazio vettoriale che sia il dominio di un'applicazione lineare suriettiva sul codominio costituito dai polinomi di grado minore o uguale a 6. [7] Il rango deve essere uguale alla dimensione di questo spazio di polinomi (7), quindi il dominio deve contenere almeno 7 vettori linearmente indipendenti.

$\triangledown$ Determinare la massima dimensione di uno spazio vettoriale che sia il dominio di un'applicazione lineare iniettiva sul codominio costituito dalle matrici reali simmetriche 3×3. [6]

Esercizio A.

Determinare la minima distanza tra l'asse y e la retta $r : \begin{cases} x + y + z = 9 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che r formi un angolo retto con la retta passante per i punti $(3,3,3)$ e $(5,2,\alpha)$.

Sol. Consideriamo il piano contenente la retta r e parallelo all'asse y; tra i piani del fascio proprio

$$h(x+y+z-9)+k(y-z)=0$$

mettiamo in luce quello idoneo: la sua equazione deve rendere nullo il determinante della matrice incompleta. Ricordiamo che l'asse y può essere descritto dal sistema $x=0 \wedge z=0$. Abbiamo allora

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ h & h+k & h-k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; h=-k \ ,$$

quindi ponendo ad esempio $k=-1$ otteniamo $h=1$ e infine l'equazione $x+2z-9=0$. Ora è sufficiente selezionare un punto qualunque sull'asse y, ad es. l'origine, calcolando poi la sua distanza δ dal piano trovato.:

$$\delta = \frac{|0+0-9|}{\sqrt{1+0+4}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \ .$$

Riguardo alla seconda domanda, calcoliamo intanto un vettore direttore di r; è molto semplice trovare una soluzione diretta per il sistema omogeneo, senza troppi passaggi, con $y=z=1$ e di conseguenza $x=-2$. Prepariamo poi il vettore $(5-3, 2-3, \alpha-3)$ e imponiamo che

$$(-2,1,1) \times (2,-1,\alpha-3) = 0 \;\Rightarrow\; -4-1+\alpha-3=0,$$

trovando quindi $\alpha=8$.

Esercizio B.

Calcolare tre autovettori, linearmente indipendenti, relativi all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui legge è $f(x,y,z) = (3x-y-z, x+2y-2z, 5x-4y)$.

Sol. Calcoliamo il polinomio caratteristico e imponiamo che sia nullo:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 5 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda = 0 \;\Rightarrow\; -\lambda(\lambda^2-5\lambda+4)=0 \ .$$

Otteniamo tre autovalori (4, 1 e 0) e quindi siamo già sicuri che esisterà una base di tre autovettori perché ciascun autovalore dovrà generare almeno un autovettore e in effetti non più di uno (la m.g. non supera mai la m.a. – teorema, approfondimento).

Il sistema relativo all'autovalore 4 è

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 & -1 \\ 1 & 2-4 & -2 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Il rango è giustamente sceso a 2 (ad es. notiamo che le ultime due colonne sono uguali). Eliminando l'ultima riga e riducendo a gradini otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue la soluzione parametrica $(0,-\gamma,\gamma)$. Un vettore rappresentativo di questo autospazio è $(0,-1,1)$. Similmente troviamo gli autospazi (γ,γ,γ) e $(4\gamma,5\gamma,7\gamma)$.